Ⓐ

LØSNINGER:

Oppg. 1:

Den homogene ligning $y'' + y = 0$ har lösning: $y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, fordi den tilhörende algebraiske ligning er $r^2 + 1 = 0$ med rötter: $r = \pm i$

I fölge teorien har den den inhomogene ligning lösning av formen:

$$y_P = Ax\cos x + Bx\sin x$$

$$y_P' = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x$$
$$= (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x$$

$$y_P'' = B\cos x - A\sin x - (A + Bx)\sin x$$
$$+ (B - Ax)\cos x =$$
$$= (2B - Ax)\cos x + (-2A - Bx)\sin x$$

Innsetting gir:

$$y_P'' + y_P = (2B - Ax)\cos x + (-2A - Bx)\sin x$$
$$+ Ax\cos x + Bx\sin x$$
$$= 2B\cos x - 2A\sin x \equiv \cos x.$$

Dette gir $2B = 1$ og $A = 0$. D.v.s $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$. Den allmenne lösning blir derfor:

$$\underline{y_A = y_H + y_P = C_1\cos x + C_2 \sin x + \tfrac{1}{2} x \sin x}$$

Oppg 2

(a) Vi innförer $t = \ln x$ og får $dt = \frac{dx}{x}$. Dette gir:

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + K = \ln(\ln x) + K$$

Vi ser derfor på:

(B)

$$\lim_{T\to\infty}\int_2^T \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{T\to\infty}\left[\ln(\ln x)\right]_{x=2}^{x=T} =$$

$$\lim_{T\to\infty}\left[\ln(\ln T) - \ln(\ln 2)\right] = \infty$$

Altså <u>divergerer</u> integralet $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$.

(b) Vi har at $f(x) = 1/(x\ln x)$; $x > 2$
er positiv, kontinuerlig og avtagende.
Da gir integraltesten at rekken

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ <u>divergerer</u> fordi

$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$ divergerer i følge (a).

<u>Oppg. 3</u>

(a) Vi har følgende:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x & f(\pi) &= -1 \\
f'(x) &= -\sin x & f'(\pi) &= 0 \\
f''(x) &= -\cos x & f''(\pi) &= 1 \\
f'''(x) &= \sin x & f'''(\pi) &= 0 \\
f^{(4)}(x) &= \cos x & f^{(4)}(\pi) &= -1 \\
f^{(5)}(x) &= -\sin x & f^{(5)}(\pi) &= 0 \\
f^{(6)}(x) &= -\cos x & f^{(6)}(\pi) &= 1
\end{aligned}$$

Gjentas med periode på 4

Dette gir:

$$P_6(x) = f(\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f^{(4)}(\pi)}{4!}(x-\pi)^4 - \frac{f^{(6)}(\pi)}{6!}(x-\pi)^6$$

$$= \underline{-1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - \frac{1}{24}(x-\pi)^4 + \frac{1}{720}(x-\pi)^6}$$

(b) $P_6\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 + \frac{1}{720}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6$

$$= -1 + \frac{1}{2}(1.570796)^2 - \frac{1}{24}(1.57070796)^4 + \frac{1}{720}(1.57070796)^4$$

ⓒ

$= -1 + \frac{1}{2} \cdot 2.467401 - \frac{1}{24} \cdot 6.0880682 + \frac{1}{720} \cdot 15.0217062$

$= -1 + 1.2337005 - 0.2536695 + 0.0208634$

$= -1.2536695 + 1.2545635 = \underline{0.0008944}$

Det korrekte svar er $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$

Altså er feilen: $\underline{0.0008944.}$

<u>Oppg. 4</u>

Vi observerer først at $P_1 = (x_1, x_1^2)$ og $P_2 = (x_2, x_2^2)$. Midtpunktet på linjesegmentet P_1P_2, betegnet P_0, har derfor koordinatene: $P_0 = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)$, d.v.s. $x_0 = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$. Vi har videre: $P_3 = (x_0, x_0^2)$. Samtidig vet vi at stigningstallet til tangenten i P_3 er $y'(x_0) = 2x_0 = 2 \cdot \frac{1}{2}(x_1+x_2) = \underline{x_1+x_2}$

Stigningstallet for sekanten $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ er:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \underline{x_1 + x_2}$$

Altså er $k = y'(x_0)$ – m.a.o. de to linjene er parallelle.

<u>Oppg. 5</u>

(a) Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer <u>absolutt</u> dersom $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer.

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer <u>betinget</u> dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, mens $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ikke konvergerer.

<u>Eks. betinget konvergent</u> rekke: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

siden denne rekken konvergerer i følge

(D)

Leibniz-kriteriet, mens $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er den harmoniske rekke som vi vet divergerer.

Eks. på absolutt konvergent rekke: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$, siden rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer i følge integralkriteriet.

(b) Vi antar at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer. Vi vet dermed at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ også konvergerer. Videre har vi:

$$0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n| \quad \text{for alle } n.$$

Siden $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ konvergerer, vil

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| - a_n)$$

også konvergere i følge sammenligningskriteriet.

(c) Vi innfører betegnelsene:

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n, \quad t_N = \sum_{n=1}^{N} (|a_n| - a_n)$$

og $u_N = \sum_{n=1}^{N} |a_n|$. Vi observerer da at

$$s_N = u_N - t_N.$$

Videre vet vi at både $\lim_{N\to\infty} u_N$ og $\lim_{N\to\infty} t_N$ eksisterer, d.v.s. det finnes reelle tall u og t s.a.

$$\lim_{N\to\infty} u_N = u, \quad \lim_{N\to\infty} t_N = t.$$

Dette gir ut fra velkjent grenseverdi-setning:

$$\lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} u_N - \lim_{N\to\infty} t_N = u - t$$

Altså konvergerer også rekken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$