Marco

MA1102 (HJEMMEØVING 1) (Leveres i boksen i nordre lavblokk!)

ØVING 7, LØSNING:

Uke 11, 12/3 - 16/3 - 2007

17.6 # 8, s. 929:

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$$

Karakteristisk ligning:

$$r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0$$

har dobbelroten $r = -2$. Altså:

$$y_H = (C_1 x + C_2)e^{-2x}$$

Ut fra teorien vil en partikulær-løsning ha formen $y_p = Ax^2 e^{-2x}$

Vi får da:

$$y_p' = A(2x - 2x^2)e^{-2x}$$

$$y_p'' = A[(2-4x) - (4x - 4x^2)]e^{-2x} = A(2 - 8x + 4x^2)e^{-2x}$$

Innsetting gir:

$$y_p'' + 4y_p' + 4y_p = Ae^{-2x}[(2 - \cancel{8x} + \cancel{4x^2}) + 4(\cancel{2x} - \cancel{2x^2}) + \cancel{4x^2}] =$$

$$Ae^{-2x}[2] = e^{-2x} \iff A = \tfrac{1}{2}$$

$$\underline{y_I} = y_H + y_p = \underline{(C_1 x + C_2)e^{-2x} + \tfrac{1}{2}x^2 e^{-2x}}$$

#10, s. 929:

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin x$$

Karakteristisk ligning: $r^2 + 2r + 2 = 0$

eller $(r^2 + 2r + 1) = -1 \therefore (r+1)^2 = -1$

$r = -1 \pm i$. Vi har dermed:

$$y_H = e^{-x}[C_1 \cos x + C_2 \sin x]$$

Siden høyresiden er $e^{-x}\sin x$, må vi prøve med:

$$y_p = e^{-x}[Ax\cos x + Bx\sin x]$$

(ØVING 7, V2007, Løsn.)

Vi har da:

$$y_p' = e^{-x}[-Ax\cos x - Bx\sin x + A\cos x + B\sin x - Ax\sin x + Bx\cos x]$$

$$= e^{-x}[(-A+B)x\cos x - (A+B)x\sin x + A\cos x + B\sin x]$$

$$y_p'' = e^{-x}[(A-B)x\cos x + (A+B)x\sin x - A\cos x - B\sin x + (-A+B)\cos x + (-A-B)\sin x + (A-B)x\sin x + (-A-B)x\cos x - A\sin x + B\cos x]$$

$$= [-2Bx\cos x + 2Ax\sin x + (-2A+2B)\cos x + (-2A-2B)\sin x]e^{-x}$$

Innsetting gir:

$$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = e^{-x}[-2B\cancel{x\cos x} + 2A\cancel{x\sin x} + (-2A+2B)\cos x + (-2A-2B)\sin x + 2(-\cancel{A}+\cancel{B})\cancel{x\cos x} + 2(-\cancel{A}-B)\cancel{x\sin x} + 2A\cos x + 2B\sin x + 2A\cancel{x}\cos x + 2Bx\cancel{\sin x}]$$

$$= e^{-x}[(-2B+2B-2A+2A)x\cos x + (2A-2A-2B+2B)x\sin x + (-2A+2A+2B)\cos x + (-2A+2B-2B)\sin x]$$

$$= [0\,\cancel{x\cos x} + 0\,\cancel{x\sin x} + 2B\cos x - 2A\sin x]e^{-x}$$

$= e^{-x}\sin x$ som gir $B = 0,\ A = -\frac{1}{2}$

$$y_I = y_H + y_p =$$

$$\underline{e^{-x}[C_1\cos x + C_2\sin x - \tfrac{1}{2}x\cos x]}$$

4.6 #7, s. 251:

Vi skal benytte Newtons metode for å bestemme en tilnærmet løsning av:

$$\sin x = 1 - x$$

(ØVING 7, V07, Lösning)

Vi studerer funksjonen:

$$f(x) = \sin x - 1 + x$$

Observerer først at $f(0) = 0 - 1 + 0 = -1 < 0$

og $f(1) = \sin 1 - 1 + 1 = \sin 1 > 0$

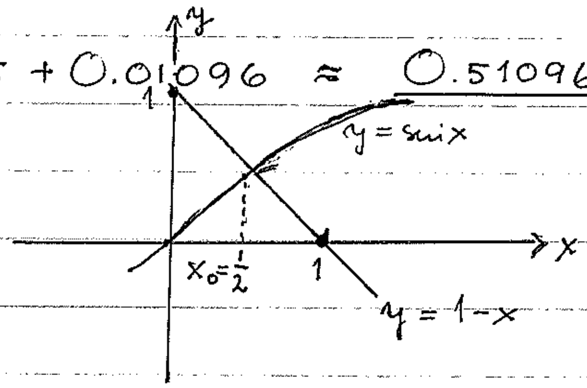
Videre er $f'(x) = \cos x + 1 > 0$ for alle $x \in (0,1)$. Setter $x_0 = \frac{1}{2}$. Newtons metode gir:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{1}{2} - \frac{\sin\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\cos\frac{1}{2} + 1}$$

$$\approx \frac{1}{2} - \frac{0.47942 - 0.5}{0.87758 + 1} \approx 0.5 + \frac{0.02058}{1.87758}$$

$$\approx 0.5 + 0.01096 \approx \underline{0.51096}$$

Skisse:



#15, s. 251:

Vi skal anvende Newtons metode på:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; \; x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & ; \; x < 0 \end{cases}$$

og anta $x_0 = a > 0$. $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}$ når $x > 0$; d.v.s. $f'(a) = \frac{1}{2} a^{-1/2}$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = a - \frac{a^{1/2}}{\frac{1}{2} a^{-1/2}} = a - 2a = \underline{-a}$$

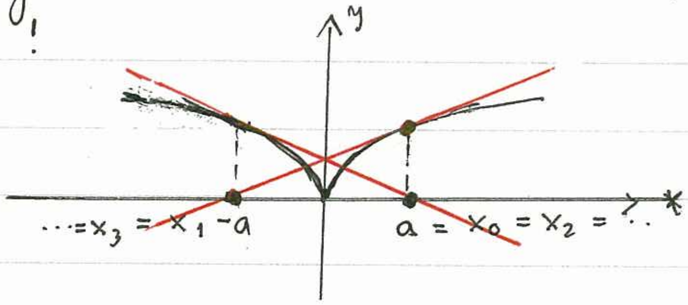
$$f'(x) = -\frac{1}{2}(-x)^{-1/2}; \; x < 0$$

NB! Husk på at $a > 0$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -a - \frac{\sqrt{+a}}{-\frac{1}{2} 1/\sqrt{+a}} = -a + 2(a) = \underline{a}$$

(Øving 7, V07, Løsning)

Dette viser at $x_3 = -a$, $x_4 = a$, o.s.v. M.a.o. vil ikke følgen konvergere mot noe punkt og vi har liten nytte av Newtons metode. Dette problem er noe kunstig fordi vi av definisjonen straks har at $f(0)=0$ og $f(x) \neq 0$ for alle $x \neq 0$. Men eksemplet illustrerer hva galt ting kan gå hvis vi bruker Newton metode blindt!



4.8 #3, s 264:

Vi skal bestemme Taylorpolynomet av orden 4 for $f(x) = \ln x$ omkring $x = 2$

$$f'(x) = x^{-1}, \quad f''(x) = -x^{-2}, \quad f'''(x) = 2x^{-3}, \quad f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$$

$$f'(2) = 1/2, \quad f''(2) = -1/4, \quad f'''(2) = 1/4, \quad f^{(4)}(2) = -6/16 = -3/8$$

$$P_4(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4$$

Trykkfeil i fasit.

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 - \frac{1}{64}(x-2)^4$$

#7, s 264:

Samme oppgave for $f(x) = 1/(2+x)$ omkring $x = 1$ av orden n.

$$f'(x) = -(2+x)^{-2}, \quad f''(x) = 2(2+x)^{-3}, \quad f'''(x) = -2\cdot 3(2+x)^{-4}$$

(Øving 7, V07, Løsning)

Vi kan ved induksjon bevise at:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,(2+x)^{-n-1}$$

Dette gir:

$$f^{(n)}(1) = (-1)^n n!\, 3^{-n-1}$$

Taylorpolynomet blir dermed:

$$P_n(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{1!}\frac{1}{3^2}(x-1) + \frac{1}{2!}\frac{2!}{3^3}(x-1)^2 - \frac{1}{3!}\frac{3!}{3^4}(x-1)^3$$
$$\cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!}\frac{1}{3^{n+1}}(x-1)^n$$

$$= \underline{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-1) + \frac{1}{27}(x-1)^2 - \frac{1}{81}(x-1)^3 + \cdots (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}}(x-1)^n}$$

#13, s. 264:

Vi skal bestemme $P_2(x)$ for $f(x) = e^x$ omkring 0 og så finne en tilnærmet verdi for $e^{-0.5}$. Feilen skal estimeres og intervallet for denne søkte verdi skal bestemmes.

$$f(x) = e^x,\quad f'(x) = e^x,\quad f''(x) = e^x,\quad f'''(x) = e^x$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2$$

$$P_2\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 0.625$$

Feilen kan angis som:

$$\left|E_3\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right| = \frac{f'''(X)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \text{der } -\tfrac{1}{2} < X < 0$$

$$= \frac{e^X}{6}\cdot\frac{1}{8} = \frac{e^X}{48} < \frac{1}{48} = \underline{0.0208\overline{3}}$$

$$0.625 - 0.0208\overline{3} < e^{-\frac{1}{2}} < 0.625$$

$$\underline{0.6041\overline{6} < e^{-1/2} < 0.625}$$

siden restleddet i dette tilfellet er negativt!

(Øving 7, V.07, Løsning)

#23, s 264:

Vi skal bestemme $P_4(x)$ for $f(x) = \sin^2 x$ omkring $x = 0$. Vi skal benytte kjente Taylor/Maclaurin-polynom.

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{24} = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$$

$$\frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4\right)$$

$$= \underline{x^2 - \frac{1}{3}x^4}$$

4.9 #15, s. 270:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x} = "\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1 - 1/\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\cos^2 x \cdot \frac{1-\cos x}{\cos^2 x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\cos^2 x \cdot \frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$= -1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Maclaurinpolynomene gir:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right)}{\cancel{x} - \left(\cancel{x} + \frac{x^3}{3} + O(x^5)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} - O(x^5)}{\frac{x^3}{3} - O(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6} + O(x^2)}{-\frac{1}{3} + O(x^2)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

(NB! Her burde vi oppgi at

$$\tan x \approx x + \frac{x^3}{3} + R_3(f;0,x)$$

der $R_3(f;0,x) = O(x^5)$.)

(Øving 7, v07, Løsning)

#17, s. 270:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2 x}{\tan x - x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\sin x\cos x}{1/\cos^2 x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{2\sin x\cos^3 x}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\sin x \cos^3 x}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{2\cos^3 x}{\sin x} = \underline{\infty}$$

$\boxed{\text{Oppg } \#23, \text{ s } 264}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2 x}{\tan x - x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + O(x^6)}{\cancel{x} + \frac{x^3}{3} + O(x^5) - \cancel{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + O(x^4)\right)}{x^3\left(\frac{1}{3} + O(x^2)\right)} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}\cdot 3 = \underline{\infty}$$