LØSNINGER:

Oppg. 1

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad , \quad f(x) = x^2 - 3 \quad , \quad f'(x) = 2x$$

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{7}{4} - \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - 3}{2 \cdot \frac{7}{4}} = \frac{7}{4} - \frac{1/16}{7/2}$$

$$= \frac{7}{4} - \frac{1}{56} = \frac{97}{56} = \underline{1.732142857}$$

(Direkte fra lommeregner har vi: 1.732050808)

Oppg. 2

(a) Ligningen er ekvivalent med:

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y^2 = \frac{1}{3}$$

eller:

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}y^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}y^2 = \frac{4}{9}$$

som er ekvivalent med:

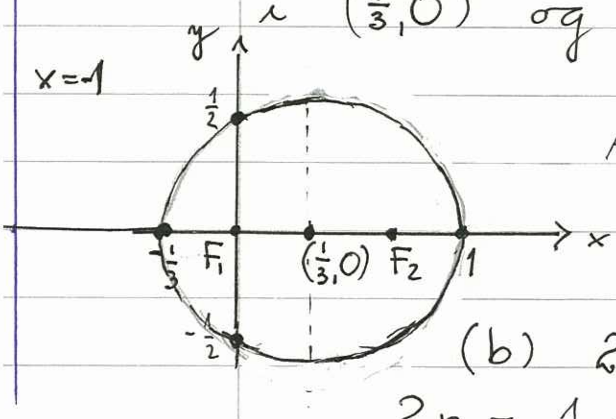
$$\frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

Dette er en ellipse med sentrum i $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ og halvakser $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Altså blir brennpunktene

$$F_1 = (0,0) \quad \text{og} \quad F_2 = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$$



(b) $2r - r\cos\theta = 1$ eller

$$2r = 1 + r\cos\theta$$

$2\sqrt{x^2+y^2} = 1 + x$. Kvadrering gir:

$$4(x^2+y^2) = 1 + 2x + x^2$$

II

Ekvivalent: $3x^2+4y^2-2x-1=0$

som er identisk med kurven i (a).

(c) Betingelsen gir i kartesiske koordinater:

$$2\sqrt{x^2+y^2} = 1+x$$

Vi gjenkjenner dette som ligningen i (b). Altså gir (a), (b) og (c) samme kurve.

OPPG. 3

Buelengde-formelen for kurver på parameterform: $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$

$x'(t) = 1-\cos t \quad , \quad y'(t) = \sin t$

$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1-2\cos t+\cos^2 t + \sin^2 t$

$= 2-2\cos t = 4\left(\frac{1-\cos t}{2}\right) = 4\sin^2\frac{t}{2}$

Buelengden blir dermed

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt \quad , \quad \text{siden } \sin\frac{t}{2} > 0 \text{ når } t\in(0,2\pi)$$

Altså: $L = 2\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = -4[-1-1] = \underline{8}$

OPPG. 4

(a) $x = a\cosh t = \frac{a}{2}(e^t+e^{-t})$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{2}(e^t-e^{-t}) = \underline{a\sinh t}$$

Vi har dessuten: $\underline{\sinh t = \sqrt{\cosh^2 t-1}}$

Altså: $a\sinh t = \sqrt{a^2\cosh^2 t - a^2}$. D.v.s.

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{2}(e^t+e^{-t}) &= a\cosh t \\ \frac{a}{2}(e^t-e^{-t}) &= \sqrt{a^2\cosh^2 t-a^2} \end{aligned}\right\}\text{ adderes}$$

$$ae^t = x+\sqrt{x^2-a^2}$$

som gir: $\underline{t = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) - \ln a}$

III

(b) Vi innför $x = a\cosh t$ og får

$dx = a\sinh t\,dt$ og $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\cosh^2 t - a^2}$

$= a\sinh t$. Dette gir:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sinh t}{a\sinh t}\,dt = \int dt = t + C$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) + C - \ln a$$

$$= \underline{\ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) + K}$$

OPPGAVE 5:

(a) Den karakteristiske ligning for den homogene ligning blir:

$$(*) \quad r^2 + 6r + 9 = (r+3)^2 = 0.$$

Vi har derfor dobbelroten $r = -3$.

Den allmenne ligning blir dermed

$$y_H = (C_1 x + C_2)e^{-3x}$$

Ut fra teorien har en partikulær-lösning for den inhomogene ligning formen: $y_P = Ae^{0x} = A$. Vi har da $y_P' = 0$, $y_P'' = 0$. Innsetting gir:

$$y_P'' + 6y_P' + 9y_P = 9A = 10 \quad \therefore \quad A = \frac{10}{9}$$

Den allmenne lösning blir derfor:

$$\underline{y_I = y_H + y_P = (C_1 x + C_2)e^{-3x} + \frac{10}{9}}$$

(b) Siden $r = -3$ er dobbelrot i $(*)$ og höyresiden har formen e^{-3x}, må vi bestemme en partikulærlösning av form:

$$y_P = Ax^2e^{-3x}$$

$$y_P' = 2Axe^{-3x} - 3Ax^2e^{-3x} = e^{-3x}A(2x - 3x^2)$$

$$y_P'' = -3e^{-3x}A(2x-3x^2) + e^{-3x}A(2-6x)$$

$$= e^{-3x}A[9x^2 - 6x - 6x + 2]$$

$$= e^{-3x}A[9x^2 - 12x + 2]$$

IV

Innsetting gir: $y_P'' + 6y_P' + 9y_P$

$= e^{-3x}A\left[(9x^2-12x+2)+6(2x-3x^2)+9x^2\right]$

$= e^{-3x}A\left[\cancel{9x^2}-\cancel{12x}+2+\cancel{12x}-\cancel{18x^2}+\cancel{9x^2}\right]$

$= e^{-3x}A[2] \equiv e^{-3x} \therefore \quad A = \frac{1}{2}$. Den allmenne løsning av den inhomogene ligning blir:

$\underline{y_I} = y_H + y_P = \underline{(C_1x+C_2)e^{-3x} + \frac{1}{2}x^2e^{-3x}}$