Logaritmer og eksponentialfunksjoner

Dette er fra de to første forelesningene i MA1102 våren 2008. Noe er skrevet mer ut, men mange detaljer er utelatt. De er utelatt med vilje, for at du skal fylle dem ut selv! Spesielt bør du fylle ut detaljene hver gang det kommer et spørsmål, men ikke bare da.

Dette er starten på et førsteutkast. Jeg legger det ut nå, slik at de som var litt slappe med noteringen har noe å arbeide med. Hvis dere ser noe åpenbart feil eller ting dere ikke finner mening i, send meg en epost.

1 Oppvarming

Kanskje startet bruken av potenser som en ren latskap? Det er litt kortere å skrive 3^7 enn $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Uansett hva årsaken er til notasjonen er vi enige om at hvis n er et positivt heltall, og a er et tall, så skal a^n bety

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ganger}}$$

Hvis n og m er to positive heltall burde det da være lett å overbevise seg selv om at

$$a^n a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ganger}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ ganger}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots\cdots a}_{n+m \text{ ganger}} = a^{m+n} \tag{1}$$

Fortsatt med n som et positivt heltall, har sikkert de fleste av dere vært med på å definere $a^{1/n}$ som det tallet som opphøyd i n-te gir a. med andre ord betyr

$$a^{1/n} = b$$

det samme som

$$a = b^n.$$

Når n er et partall er det en forutsetning her at a er positiv, så la oss fra nå av nøye oss med å ta potenser av positive tall. Vi blir også fort enige om at $a^{m/n}$ må bety

$$a^{m/n} = a^{\overbrace{1/n + 1/n + \cdots + 1/n}^{m \text{ ganger}}} = \underbrace{a^{1/n} \cdot a^{1/n} \cdots a^{1/n}}_{m \text{ ganger}} = (a^{1/n})^m.$$

Hvis r er et positivt tall er vi også enige om at a^{-r} skal bety

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

Dermed er vi enige om hva det vil si å opphøye et (positivt) tall a i en potens r, a^r, så lenge r er et rasjonalt tall. Men hva skal for eksempel $2^{\sqrt{2}}$ bety? Det er absolutt legitimt å spørre seg selv: "Hvorfor skal vi bry oss med det?", og du kan jo prøve å finne noen gode svar på det spørsmålet selv. Hvis du ikke kommer på et godt svar med en gang, kan du jo ha spørsmålet i bakhodet mens du leser videre, og se om du gradvis formulerer et svar etter hvert. Kanskje får du flere svar, og kanskje endrer du mening underveis?

2 Eksponentialfunksjoner og logaritmer, del 1

Det vi har gjort over definerer hva funksjonen

$$g(x) = a^x$$

er hvis a er et positivt tall og x er et rasjonalt tall. En annen måte å si det på, er at definisjonsmengden til g er $D_g = \mathbf{Q}$. Vi kaller denne funksjonen *eksponentialfunksjonen med grunntall a*. Innholdet i ligning (1) blir her

$$g(x+y) = g(x)g(y) \tag{2}$$

eller $a^{x+y} = a^x a^y$. Vi vet også at g har en omvendt funksjon (hvorfor?) som er det vi har kalt *logaritmen med grunntall a* eller *a-logaritmen*, $g^{-1}(x) = \log_a x$. Det vil si at $u = \log_a x$ er tallet vi må opphøye a i for å få x, eller med andre ord:

$$u = \log_a x \quad \text{er det samme som} \quad a^u = x.$$

Fra ligning (2) og at $\log_a$ er den omvendte funksjonen til g får vi at

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y. \tag{3}$$

Så langt er alt vel og bra, men vi har et "lite" problem: hvilke tall er $\log_a$ definert for? Jo, kun de som kommer ut av den tilhørende eksponentialfunksjonen, som foreløpig kun har de rasjonale tallene som definisjonsmengde. Det vi vet er at vi kun er interessert i å ta logaritmer av positive tall (hvorfor?).

Det hadde kanskje vært mest naturlig å "fikse" dette problemet med eksponentialfunksjonene først, vi har tross alt en ganske god følelse for hva slags funksjon det er, men vi skal heller starte "baklengs", og ende opp med å ta eksponentialfunksjoner til sist.

3 “Logaritmefunksjoner”

Vi skal se om vi kan finne funksjoner som kan gjøre jobben som logaritmer, og som er definert for alle positive reelle tall, $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$. La f være en slik funksjon. Ligning (3) sier at vi skal kreve

$$f(xy) = f(x) + f(y), \tag{4}$$

og vi vil kreve dette for alle $x \in D_f = \mathbf{R}_+$. Hvis vi setter $x = y = 1$ i denne ligningen får vi umiddelbart at

$$f(1) = 0. \tag{5}$$

Legg merke til at dette er noe som må gjelde for *alle* funksjoner som tilfredsstiller ligning (4). Skal vi kunne bruke en del av det verktøyet vi har utviklet vil vi også håpe at vi kan finne en deriverbar funksjon til å gjøre jobben for oss, så la oss anta at

$$f \text{ er deriverbar.} \tag{6}$$

Hvis vi deriverer hver side av ligning (4) med hensyn på x får vi (gjør dette, hvilke(n) derivasjonsregel bruker du?)

$$f'(x) = f'(xy) \cdot y.$$

Hvis vi setter $x = 1$ i ligningen over får vi $f'(y) = f'(1)\frac{1}{y}$, eller, om du heller vil,

$$f'(x) = c\frac{1}{x} \tag{7}$$

der c er en konstant, $c = f'(1)$.

Hvis vi ser på et lukket intervall i $\mathbf{R}_+$ har vi at $f'(x) = c/x$ er integrerbar på dette intervallet (hvorfor? du kan ikke bruke at du kjenner en antiderivert til $1/x$ ennå (hvorfor ikke?)). Vi vet selvfølgelig også at f er en antiderivert til f'. Dermed sier analysens fundamentalsetning (se tillegget) at

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x c\frac{1}{t} = c\int_a^x \frac{1}{t}dt$$

hvis a og x er positive tall. Vi er interessert i $f(x)$, og legg merke til at ligningen over er sann for alle positive a. For eksempel kan vi bruke $a = 1$, og vi gjør selvfølgelig dette valget fordi (5) gjør uttrykket enklest mulig:

$$f(x) = c\int_1^x \frac{1}{t}dt. \tag{8}$$

Husk at tallet $c = f'(1)$. Eneste grunn til at vi skriver c i stedet er latskap og at det er lettere å lese (men så må vi huske på innholdet i stedet…)

Legg merke til at funksjonene i (8) er de eneste som finnes som tilfredsstiller (4) og (6). Vi får kanskje den aller enkleste av disse hvis vi velger $c = 1$, og vi kaller den funksjonen for den naturlige logaritmen:

Definisjon 1 (Den naturlige logaritmen:) *Den* naturlige logaritmen *er en funksjon* ln *med definisjonsmengde* $D_{\ln} = \mathbf{R}_+$ *som er definert ved*

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt. \tag{9}$$

Merknad 2 *Selv om du sikkert kjenner til* ln *fra før, er det ikke gitt at det vi nå kaller* ln *er det samme. Valget av notasjon skulle tyde på det, men det er noe vi er nødt til å vise. (Og det skal vi gjøre.)*

Vi har startet med nesten ingenting, og kommet frem til den funksjonen vi nettopp definerte. Men vi kan nå si ganske mye om funksjonen:

Setning 3 *Egenskaper til* $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$*:*

1. $\ln 1 = 0$.
2. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$.
3. $\ln xy = \ln x + \ln y$.
4. $\ln x$ *er en strengt voksende funksjon.*
5. *For* $n \in \mathbf{N}$ *har vi* $\ln(a^n) = n \ln a$.
6. $\ln x \to \infty$ *når* $x \to \infty$.
7. $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$.
8. $\ln x \to -\infty$ *når* $x \to 0^+$.
9. *For et hvert tall* $u \in \mathbf{R}$ *så finnes det nøyaktig ett tall* $y \in \mathbf{R}_+$ *slik at* $\ln y = u$.

Merknad 4 *Legg spesielt merke til det siste punktet. Det sier at bildet* $V_{\ln}$ *til* ln *er hele tall-linjen, og at* ln *er en injektiv (en-til-en) funksjon. Dermed har* ln *en omvendt funksjon med hele tall-linjen som definisjonsområde. (Så kan du, før du leser videre, gjette hvilken funksjon det er.)*

Noen av egenskapene nevnt over er lette å vise, andre er litt mer arbeid. Her er hovedideene til bevis, med mer eller mindre detaljer. Fyll ut detaljene selv, og pass på at du er overbevist om at det som står her er riktig!

1. Hva er integralet fra 1 til 1?
2. Følger fra analysens fundamentalsetning.

3. $$\ln xy = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt = \ln x + \int_1^y \frac{1}{u} du = \ln x + \ln y.$$

   I den tredje likheten har vi brukt substitusjonen $u = t/x$. Husk å sjekke detaljene i utregningen. Ser du hvorfor vi har brukt denne substitusjonen? Ser du hvorfor vi delte opp integralet slik vi gjorde i den første likheten?

4. Følger fra punkt 2. og at x er positiv.

5. Påstanden er sann for $n = 1 : \ln a^1 = 1 \cdot \ln a$. Anta at påstanden er sann for et heltall $k : \ln(a^k) = k \ln a$. Da følger det at $\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \cdot a) = \ln(a^k) + \ln a = k \ln a + \ln a = (k+1) \ln a$. Ved induksjonsprinsippet følger det dermed at påstanden er sann for alle heltall.

6. Dette betyr at for ethvert (stort) tall M finnes det et tall m slik at $\ln x > M$ når $x > m$. Sett inn $a = 2$ i punktet over. $\ln 1 = 0$, og ln er strengt voksende, så $\ln 2 > 0$. Hvis M er gitt kan vi derfor finne et tall n som er slik at $\ln 2^n = n \ln 2 > M$. Fordi ln er strengt voksende har vi at $\ln x > \ln 2^n > M$, som var det vi trengte vise.

7. Bruk $0 = \ln 1 = \ln \frac{x}{x} = \ln x \frac{1}{x} = \ln x + \ln \frac{1}{x}$.

8. Bruk de to foregående punktene.

9. Denne blir litt mer jobb. La oss først vise at det finnes minst ett slikt tall: Anta først at u er positiv. Vi vet at $\ln x$ er en kontinuerlig funksjon (hvorfor)? Ta et tall α slik at $\ln \alpha > u$. (Punkt 6. forteller oss at vi kan finne et slikt tall.) Vi vet også at $\ln 1 = 0$, så vi har $0 = \ln 1 < u < \ln \alpha$. Da sier skjæringssetningen (se tillegg) at det finnes et tall y mellom 0 og α slik at $\ln y = u$. Jeg overlater til deg å sjekke dette når u er negativ. (Bruk punkt 7. eller bytt ut punkt 6. med punkt 8. og gjør de nødvendige tilpasningene i argumentet over.)

   Vi har altså vist at det finnes minst et tall y som gjør jobben. La oss nå vise at det ikke finnes flere. La oss anta at det finnes flere. Kall et av dem y^*. Da har vi at $\ln y^* = \ln y$ (hvorfor?). Da sier sekantsetningen at det må finnes et punkt β mellom y og y^* slik at den deriverte til ln er lik null i β. Men i følge punkt 2. er ikke dette mulig, så antagelsen om at det finnes et slikt punkt y^* må være feil, altså finnes det nøyaktig ett tall y slik at $\ln y = u$.

   Tegn noen bilder, så ser du lettere hvordan du bruker skjæringssetningen og sekantsetningen.

Da har vi fått sagt litt om denne "nye" funksjonen vår, ln. La oss avslutte med en liten definisjon.

Definisjon 5 *Bruk e til å betegne det tallet som er slik at* $\ln e = 1$.

Legg merke til at i utgangspunktet ikke er gitt at et slikt tall finnes! Det er det siste punktet i setning 3 som garanterer oss at tallet e eksisterer. Legg merke til at

$$1 = \ln e = \int_1^e \frac{1}{t} dt.$$

Tallet e kan dermed tolkes som det tallet som gjør at arealet mellom kurvene $y = 1/x$, $x = 1, x = e$ og x-aksen blir 1. Bruk denne beskrivelsen til å overbevise deg selv om at $2 < e < 4$. (Det kan hjelpe å tegne noen bilder.)

4 Invers til den naturlige logaritmen

I det forrige avsnittet startet vi med å snakke om hva vi syntes var et minimumskrav til en funksjon som skulle kunne kalle seg en logaritme, og endte opp med å *definere* en slik funksjon, $\ln x$. Vi har sett at den funksjonen vi har definert har hele den positive reelle aksen som definisjonsmengde, og at den er injektiv (hvilket punkt var det?). Vi kan derfor definere den omvendte funksjonen til $f(x) = \ln x$. Vi vil bruke den en del, så la oss gi den et eget "navn" den også: $f^{-1}(x) = \exp x$. Legg merke til at så langt er exp bare et navn! Fordi bildet til $\ln x$ er hele tall-linjen har vi at definisjonsmengden til $\exp x$ er $D_{\text{exp}} = \mathbf{R}$ og bildet er $V_{\text{exp}} = \mathbf{R}_+$. Men ved å bruke at $\exp x$ er den omvendte funksjonen til $\ln x$, som vi nå vet en del om, kan vi faktisk si ganske mye mer:

Setning 6 *Egenskaper ved* $\exp x$:

1. $\exp 0 = 1$.
2. $\exp 1 = e$.
3. $\exp(x + y) = (\exp x) \cdot (\exp y)$.
4. $\frac{d}{dx}(\exp x) = \exp x$.
5. *Hvis* $r \in \mathbf{Q}$ *så har vi* $\exp r = e^r$.

Før vi viser disse tingene er det nesten umulig å ikke kommentere det siste punktet. Vi startet, for en del sider siden, med å se på potenser, og kom til at vi kunne snakke om dem, så lenge potensen var et rasjonalt tall. Vi har nå laget oss en funksjon, $\exp x$, som er definert for alle tall på tall-linja, og som gjør akkurat det den skal på de rasjonale tallene. I tillegg er den deriverbar, og egenskapen i ligning (1) gjelder for alle reelle tall (punkt 3. i setningen over). La oss nå vise at setningen er sann. Som vanlig er en del av jobben overlatt til deg!

1. Følger fra $\ln 1 = 0$. (hvorfor?)
2. Følger fra $\ln e = 1$.
3. Sett $u = \exp x$ og $v = \exp y$. Da har vi $\ln u = x$ og $\ln v = y$. Fyll ut resten av detaljene selv (bruk at $\ln uv = \ln u + \ln v$.)

4. Denne blir litt jobb.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\exp x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\exp(x)\exp(h)-\exp(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\exp(x)\frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(x)\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h}
\end{aligned}$$

Sjekk hver av disse likhetene selv!

Vi må altså vise at den siste grensen er lik 1. $\ln x$ er kontinuerlig, så $\exp x$ er kontinuerlig, så $\lim_{h\to 0}\exp(h) = 1$ og $k = \exp(h) - 1$ går mot null når h går mot null og motsatt. Vi vet noe om den deriverte til $\ln x$, så la oss bruke dette. Vi ser på når h (det som går inn i exp) går mot null, så det burde tilsvare at det som puttes inn i ln går mot 1. La oss derfor se om den deriverte til ln i 1 kan hjelpe oss:

$$\begin{aligned}
1 &= (\frac{d}{dx}\ln)(1) = \lim_{k\to 0}\frac{\ln(1+k)-\ln 1}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\ln(1+k)-\ln 1}{k} \\
&= \lim_{k\to 0}\frac{\ln(1+k)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{h}{\exp(h)-1} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{\exp(h)-1}
\end{aligned}$$

Igjen: sjekk alle likhetene selv, inkludert den første og den siste.

Det siste leddet her er nesten det vi ønsket, det er bare snudd på hodet. Klarer du å fullføre argumentet selv?

5. Før vi setter i gang: legg merke til at vi nå er tilbake til noe vi kjenner fra før. Det som står på høyre side er akkurat det vi snakket om i innledningen!

   La oss starte med å anta at $r = \frac{n}{m}$, der m og n er *positive* heltall. La oss først se at

$$\exp(na) = (\exp a)^n. \tag{10}$$

   Det er sant hvis $n = 1 : \exp(1\cdot a) = \exp(a) = (\exp a)^1$. Anta nå at det er sant for et heltall k. Da har vi at $\exp((k+1)a) = \exp(ka + a) = \exp(ka)\exp a = (\exp a)^k \exp a = (\exp a)^{k+1}$. Induksjonsprinsippet sier dermed at ligning (10) er sann for alle positive heltall.

   Hvis vi nå tar $a = 1$ får vi

$$\exp n = (\exp 1)^n = e^n.$$

   Hvis vi tar $a = 1/m$ får vi

$$e = \exp 1 = \exp m\frac{1}{m} = (\exp(1/m))^m.$$

   Fordi uttrykket over er positivt kan vi ta m-te rot (opphøye i $1/m$) og får $\exp(1/m) = e^{1/m}$. Til slutt får vi $\exp(n/m) = \exp(n\frac{1}{m}) = (\exp(\frac{1}{m}))^n = (e^{1/m})^n = e^{n/m}$. Dermed var vi ferdig med positive rasjonale tall.

Vi har $1 = \exp 0 = \exp(a - a) = \exp a \exp(-a)$, så $\exp(-a) = 1/\exp a$. Hvis r er et negativt rasjonalt tall får vi derfor (husk at $-r$ da er positiv, så vi kan bruke det vi har gjort over):

$$\exp r = \frac{1}{\exp -r} = \frac{1}{e^{-r}} = e^r.$$

Da er vi endelig ferdige! Pass på at du sjekker *hvorfor* alle likhetene i dette punktet er riktige.

5 Eksponentialfunksjoner og logaritmer, del 2

5.1 Et lite sammendrag

Vi startet med å se på heltallspotenser. De førte oss over til å se på røtter (kvadratrot, kubikkrot, n-te rot), og vi ble enige om hva det ville si å opphøye et positivt tall a i et rasjonalt tall r. Problemet var de irrasjonale tallene. Vi så på en eneste egenskap ved potenser/eksponentialfunksjoner, og så hvordan den måtte bli for omvendte funksjoner til eksponentialfunksjonene (logaritmer). Ut fra denne ene egenskapen, og ønsket om at funksjonene skulle være deriverbare, fant vi en veldig liten klasse funksjoner som hadde muligheten til å tilfredsstille ønskene våre. Den enkleste av disse funksjonene ga vi et navn, den naturlige logaritmen, $\ln x$, og vi viste en del egenskaper denne funksjonen har. Blant annet viste vi at den har en omvendt funksjon, og vi betegnet den med $\exp x$. Vi definerte oss også et helt spesielt tall, og brukte e til å betegne dette tallet. Helt til slutt har vi vist at $\exp x$ er en "eksponentialfunksjon" hvis x er et rasjonalt tall og at $\exp x$ tilfredsstiller de ønskene vi hadde til en slik funksjon.

5.2 e^x og $\ln x$

Som vi avsluttet med i forrige setning, har vi vist at når x er et rasjonalt tall, så er $e^r = \exp r$. Vi går nå til det skrittet å *definere* e^x slik for alle reelle tall x.

Definisjon 7 *Hvis* $x \in \mathbf{R}$ *definerer vi* e^x *som*

$$e^x = \exp x. \tag{11}$$

Da har vi selvfølgelig at $g(x) = e^x$ arver alle egenskapene til $\exp x$. Blant annet er den omvendte funksjonen lik $g^{-1}(x) = \ln x$.

5.3 a^x og $\log_a x$

Vi startet med et ønske om å vite mer om hva a^x skulle være hvis a er et positivt tall. Så langt har vi funnet ut alt vi ønsker å vite, men kun når $a = e$, et ganske spesielt tall som vi ikke vet alt for mye om.

Husk at de eneste mulighetene for "logaritmefunksjoner" var

$$f(x) = c \ln x,$$

der $c = f'(1)$. (Vi har kanskje ikke sagt dette rett ut, men det følger av ting vi har sagt.)

Vi er nå interessert i å se på a^x og inversfunksjonen $\log_a x$. Vi vil ha at $a^1 = a$, som tilsvarer $\log_a a = 1$, med andre ord $1 = \log_a a = c \ln a$ (hvorfor?). Dette gir bare en mulighet for hva $\log_a$ kan være. Vi kan da definere a^x som inversen til $\log_a x$, er mer direkte som vi gjør her (men da må vi vise at dette *er* den omvendte funksjonen):

Definisjon 8 *Hvis $a \in \mathbf{R}_+$ definerer vi a^x og $\log_a x$ ved*

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x \qquad \textit{for } x \in \mathbf{R}_+ \tag{12}$$

og

$$a^x = e^{x \ln a} \qquad \textit{for } x \in \mathbf{R}. \tag{13}$$

Vi kan bruke definisjonene og det vi allerede har gjort for å finne ut en del om disse funksjonene. Her er noe av det:

Setning 9 *Egenskaper ved $\log_a x$ og a^x :*

1. $\frac{d}{dx} a^x = (\ln a) a^x$.
2. $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{\ln a} \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$.
3. *a^x er en voksende funksjon hvis $a > 1$, og en avtagende funksjon hvis $0 < a < 1$.*
4. *$\log_a x$ er en voksende funksjon hvis $a > 1$, og en avtagende funksjon hvis $0 < a < 1$.*
5. *$\log_a x$ og a^x er omvendte funksjoner (forutsatt at $a \neq 1$).*
6. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.
7. $a^{x+y} = a^x a^y$.
8. $\ln a^x = x \ln a$.
9. $\log_b a^x = x \log_b a$.
10. $(ab)^x = a^x b^x$.
11. $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$.

Vis dette selv!

Merknad 10 *Hva skal a^{b^c} bety? Vi har hvertfall to muligheter*

$$a^{(b^c)} \qquad \textit{og} \qquad (a^b)^c.$$

Det er fristende å tro at det er det samme, men det er det ikke. Tenk på hva notasjonen betyr. Du kan kanskje bruke $a = b = c = 3$ for å hjelpe deg. I det ene tilfellet får du 3^9 og i det andre tilfellet får du 3^{27}. (Hvilken gir deg hvilken?) Hvis vi noen gang skal skrive a^{b^c} må vi derfor bli enige om hva det skal bety. La oss være enige om å bruke den venstre tolkningen, altså

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}.$$

Hvordan vil du nå tolke

$$a^{b^{c^d}}?$$

6 Oppgaver

oppgave 1: Vis at hvis f er en funksjon som har hele tall-linja som definisjonsmengde, $D_f = \mathbf{R}$, og tilfredsstiller $f(xy) = f(x) + f(y)$, så må f være konstant lik null.

oppgave 2: Vi viste i setning 3 at $f(x) = \ln x$ er deriverbar, og at $f'(x) = 1/x$. Vi har også blitt enige om at e^x er den omvendte funksjonen til $f(x) = \ln x$. Bruk hva du husker om derivasjon av omvendte funksjoner, eller bruk implisitt derivasjon, til å vise at $\frac{d}{dx}e^x = e^x$. (Vi har allerede vist dette, det er punkt 4. i setning 6, så det du gjør nå er å gi et annet bevis.)

oppgave 3: Vis alle egenskapene i setning 9.

7 Etterord

Vi har nå gitt en grundig og fornuftig definisjon av hva det burde si å ta potenser av positive tall. Vi gjorde det ikke ved å angripe spørsmålet direkte. I stedet snek oss inn bakveien, men passet på at vi tok vare på det som var viktig. Det viste seg at det resultatet vi fikk var bra. Det er viktig å merke seg at dette ikke er den eneste måten vi kunne gjort dette på. Vi kunne for eksempel definert $g(x) = e^x$ mer direkte ved å si at det er den eneste funksjonen som har $g(x) = g'(x)$ for alle $x \in \mathbf{R}$ og som har $g(0) = 1$. Da måtte vi vist at det finnes en slik funksjon (og at det ikke finnes flere, men det vet vi (hvorfor?)). Hadde vi valgt den veien ville vi definert $\ln x$ som den omvendte funksjonen til e^x. Denne angrepsmåten virker kanskje mer fristende, men jeg er ikke så sikker på om den hadde blitt noe lettere, kanskje heller det motsatte. Nok en angrepsmåte er følgende: Start slik vi gjorde, med å definere hva det vil si å opphøye et tall i en rasjonal potens, $a^{m/n}$. Definer a^x for alle x ved å "fylle inn" hullene mellom alle de rasjonale tallene. Du kan jo tenke på hvordan du ville gjøre dette, og når du har gjort det må du vise at den funksjonen du har fått har alle de egenskapene den skal ha. (Når du virkelig forstår det vi har gjort her vil du se at det på mange måter er det vi har gjort. Men vi har fylt inn hullene ved å gå via logaritmen og tilbake, ikke først gjøre oss helt ferdige med potenser og deretter snakke om logaritmer.) Det finnes flere (sikkert mange) måter å gjøre dette, men det får de spesielt interesserte finne ut av selv. Start med en tur på biblioteket.

Vi har brukt ganske mye tid på noe som kanskje kan virke som en liten ting, men samtidig har vi fått brukt og repetert ganske mye god matematikk og fått mye god trening. Når du har arbeidet deg ordentlig gjennom dette et par ganger synes du dessuten kanskje at det ikke lenger var "bare en liten ting"? Det som uansett er sikkert er at du kan være litt stolt av deg selv når du forstår alt som står her, og er i stand til å fylle ut alt jeg har overlatt til deg. Og selv om vi har laget oss en abstrakt og vakker definisjon, ikke glem hvor den kommer fra. Husker du det som står i den første delen, så greier du også å bruke dette til noe. . . .

8 Tillegg

Her er noen begreper vi har brukt som det kan være nyttig at du er sikker på:

- Funksjoner
- Omvendte funksjoner (kalles også ofte inverse funksjoner)
- Kontinuerlige funksjoner
- Derivasjon
- Integrasjon (og da tenker jeg på det bestemte integralet)

Setning 11 (Skjæringssetningen) *La $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ være en kontinuerlig funksjon, og d et tall mellom $f(a)$ og $f(b)$.*

Da finnes det et punkt $c \in (a,b)$ slik at

$$f(c) = d.$$

Setning 12 (Sekantsetningen) *La $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ være en kontinuerlig funksjon. Anta at f er deriverbar på (a,b).*

Da finnes det et punkt $c \in (a,b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tegn et bilde til hver av de to setningene, så både forstår og husker du hva de sier!

Slik vi har definert begrepene er det absolutt en stor forskjell på *antiderivasjon* og *bestemte integral.* Tenk litt over hva som er innholdet i de to begrepene før du leser følgende setning, som sier at de likevel har mye med hverandre å gjøre. Det er kanskje den veldig tette sammenhengen som denne setningen gir som gjør det så vanskelig å skille de to begrepene?

Setning 13 (Analysens fundamentalsetning) *Anta at $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ er en kontinuerlig funksjon.*

DEL I: *Da er f integrerbar på ethvert intervall $[a,x]$, der $a \leq x \leq b$.*
I tillegg har vi at funksjonen
$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ er kontinuerlig på $[a,b]$ og $F'(x) = f(x)$ for alle x i (a,b).

DEL II: *Anta at G er en antiderivert til f.*
Da er $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Legg merke til at det del I sier er at vi har *laget* en funksjon som er en *antiderivert* til den gitte funksjonen f.