Litt mer om kjeglesnitt og Keplers lover om planetbanene

Det er ikke meningen at denne teksten skal stå for seg selv. Den er ment som en hjelp mens du leser 11.6 og deler av kapittel 8 i læreboka. Hvis du ikke husker prikkprodukt og kryssprodukt fra VGS bør du repetere noe av det mens du leser dette. Jeg har prøvd å bruke samme notasjon gjennom teksten. Det betyr at den noen ganger er den samme som i boka, andre ganger ikke. Det er mange detaljer her som må fylles ut, så les gjennom med skrivesaker tilgjengelig. Send meg en epost hvis du finner noe som er feil eller uklart.

1 Litt mer om kjeglesnitt

1.1 Nok en beskrivelse av kjeglesnitt

Minner om hvordan vi definerte kjeglesnittene:

Parabel: Brennpunkt og styrelinje (like avstander)

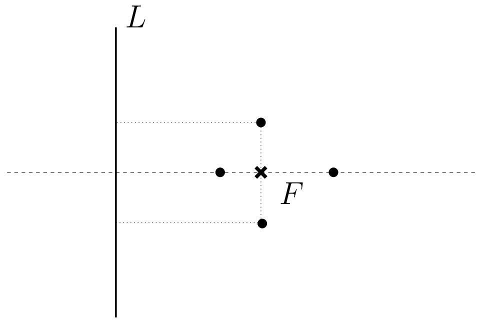
Ellipse: To brennpunkt (konstant sum)

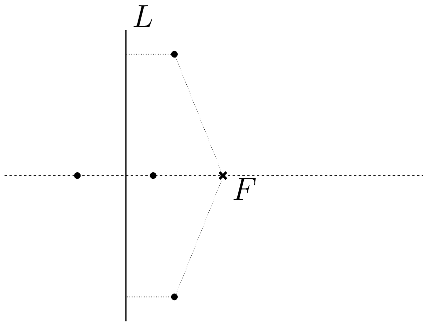
Hyperbel: To brennpunkt (konstant differanse)

Beskrivelsen for parabelen kan reformuleres som $\frac{PF}{PL} = 1$.

La oss prøve noe nytt:

- Hva hvis vi prøver
$$\frac{PF}{PL} = \varepsilon$$
for andre ε enn 1?
- Må være positiv!
- Se på $0 < \varepsilon < 1$ og $1 < \varepsilon$ hver for seg.
- Det kan se ut som $0 < \varepsilon < 1$ gir ellipser.
- Det kan se ut som $1 < \varepsilon$ gir hyperbeler.





1.1.1 Oppvarming

$0 < \varepsilon < 1$: Vi har sett at på linja gjennom F som står normalt på L får vi to punkt som i så fall må bli toppunktene. Lag et koordinatsystem slik at disse får koordinatene $(-a, 0)$ og $(a, 0)$ og $F = (-c, 0)$. La L være gitt ved $x = -p$. Da har vi at $\varepsilon = \frac{a-c}{p-a}$ og $\varepsilon = \frac{a+c}{p+a}$ som gir $p = \frac{a}{\varepsilon}$. (Hvis du ikke har prøvd å tegne en figur ennå, er det jammen på tide!)

$1 < \varepsilon$: Som over får vi to punkt på normalen. Hvis vi bruker tegningene over blir det naturlig å kalle disse $(-a, 0)$ og $(a, 0)$, men $F = (c, 0)$ og L gitt ved $x = p$. På samme måte som sist får vi igjen $p = \frac{a}{\varepsilon}$.

1.1.2 Litt regning

Med figurene du nå har tegnet blir det relativt lett å se at i begge tilfellene er $c = \varepsilon a$ og $\varepsilon = \frac{c}{a}$. (Som over, eller se på toppunktet nærmest styrelinja.) Hvis vi har ellipser/hyperbeler, så har de altså eksentrisitet ε.

Se på et punkt $P = (x, y)$ på kurvene.

$0 < \varepsilon < 1$: Med valgene vi har gjort får vi

$$\begin{aligned} PF^2 &= (x + \varepsilon a)^2 + y^2 \\ PL &= x + \frac{a}{\varepsilon} \\ \frac{PF^2}{PL^2} &= \frac{(x + \varepsilon a)^2 + y^2}{(x + \frac{a}{\varepsilon})^2} = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

$1 < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} PF^2 &= (x - \varepsilon a)^2 + y^2 \\ PL &= x - \frac{a}{\varepsilon} \\ \frac{PF^2}{PL^2} &= \frac{(x - \varepsilon a)^2 + y^2}{(x - \frac{a}{\varepsilon})^2} = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Med litt regning kommer vi i begge tilfellene til

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)} = 1$$

som vi kjenner igjen som

- en ellipse når $1 - \varepsilon^2 > 0$, med andre ord $0 < \varepsilon < 1$.
- en hyperbel når $1 - \varepsilon^2 < 0$, med andre ord $1 < \varepsilon$.

(Dette finner du stort sett i 8.1)

1.2 Kjeglesnitt i polarkoordinater

Vi har nettopp sett at vi kan beskrive alle kjeglesnitt ved et brennpunkt F, en styrelinje L, en konstant ε (eksentrisiteten) og

$$\frac{PF}{PL} = \varepsilon.$$

Sett origo i F og L som $x = -p$. Hvis et punkt P på kjeglesnittet er gitt i polarkoordinater $P = [r, \theta]$ får vi $PF = r$, $PL = p + r\cos\theta$ og

$$\frac{r}{p + r\cos\theta} = \varepsilon$$

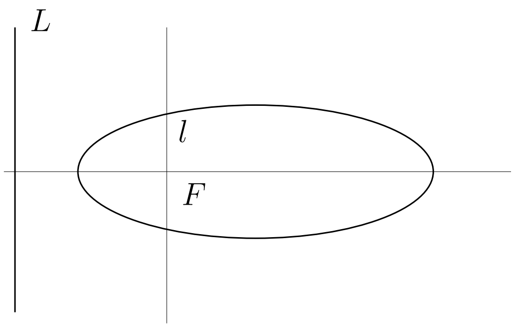
eller

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon\cos\theta}.$$

1.3 Litt mer om ellipsen

La ellipsen være gitt ved brennpunktet F, styrelinja L og eksentrisiteten ε som før. Trekk linja gjennom brennpunktet som er parallell med styrelinja og la l være halve lengden. Da får vi, fra styrelinje/brennpunkt beskrivelsen, at $l/(p - c) = \varepsilon$, og med alt annet vi har gjort får vi

$$a = \frac{l}{1 - \varepsilon^2}.$$



Hvis vi bruker dette, $c = \varepsilon a$, og $b^2 + c^2 = a^2$ får vi også

$$b = \frac{l}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Til slutt får vi, hvis ellipsen er gitt ved $r = \frac{\varepsilon p}{1+\varepsilon\cos\theta}$, at $l = \varepsilon p$, eller med andre ord, at

$$r = \frac{l}{1+\varepsilon\cos\theta}.$$

En liten oppgave til deg: Vis at vi kan skrive $b^2 = la$.
(Dette finner du stort sett i 8.5, men også litt andre steder, som i 11.6.)

2 Posisjonsvektorer

(Dette vil du finne litt her og der i boka, og noe må du kanskje tilbake til VGS bøkene dine for å finne?)

Et punkt i planet kan for eksempel beskrives ved

- kartesiske koordinater (x, y)
- polarkoordinater $[r, \theta]$
- posisjonsvektor $\mathbf{r}$

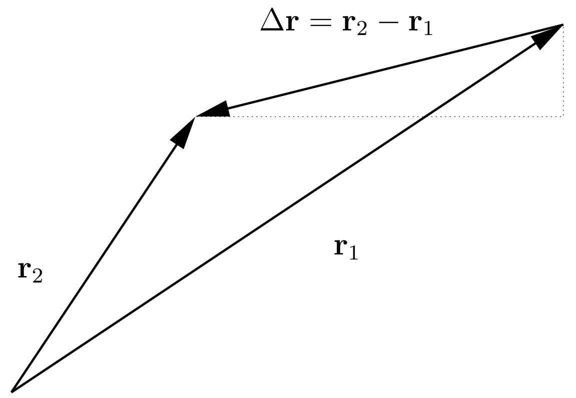
og en parametrisert kurve kan da for eksempel beskrives ved

- $(x(t), y(t))$
- $[r(t), \theta(t)]$
- $\mathbf{r}(t)$

Vi kan derivere $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{r} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) \\ &= x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}\end{aligned}$$

Jeg skrev det slik for å illustrere notasjonen vi vil bruke. Mellom en del av likhetstegnene er det samme gjenntatt, bare med forskjellig notasjon. Spesielt vil en prikk over et symbol bety at vi deriverer med hensyn på t. $\dot{f}$ vil altså bety $\frac{df}{dt}$ ikke for eksempel $\frac{df}{d\theta}$. Vi vil også ofte la være å skrive variablen. Intensjonen er at det skal bli lettere å lese, men da må du huske på at for eksempel $\mathbf{r}$ ofte vil bety $\mathbf{r}(t)$ eller $\mathbf{r}(\theta)$ eller høyst sannsynlig begge.... Se på den deriverte til en vektor som hvordan denne endrer seg. Den kan endre seg i de forskjellige retningene, og disse endringene er igjen beskrevet av den deriverte til hver retningsfunksjon — se på bildet. (Dette var en veldig rask, og lite presis, gjennomgang for de av dere som ikke tar MA1103.)



Hvis vi tenker på parameteren t som tid får vi at hastighet og akselerasjon er

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$$

og

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$$

Vi skal se på disse vektorene på en litt annen måte også.

Hvis $\mathbf{r}$ er en posisjonsvektor, la $r = |\mathbf{r}|$ være lengden av vektoren og lag en enhetsvektor i samme retning

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

og definer $\hat{\theta}$ til å være vektoren vi får ved å rotere $\hat{\mathbf{r}}$ $\pi/2$. (Hvis posisjonsvektoren $\mathbf{r}$ svarer til et punkt med polar koordinater $[r, \theta]$ vil $\hat{\theta}$ være enhetsvektoren i retning $\theta + \frac{\pi}{2}$.)

Hvis $\mathbf{r}(t)$ beskriver en kurve så vil $\hat{\mathbf{r}}(t)$ og $\hat{\theta}(t)$ beskrive to ortogonale enhetsvektorer til hvert punkt på kurven. Hvis $\mathbf{r} = [r, \theta]$ i polarkoordinater har vi

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= (\cos\theta, \sin\theta) \\ \hat{\theta} &= (-\sin\theta, \cos\theta) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\hat{\mathbf{r}} &= (-\sin\theta, \cos\theta) = \hat{\theta} \\ \frac{d}{d\theta}\hat{\theta} &= (-\cos\theta, -\sin\theta) = -\hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

Dette gir oss

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{r}} &= \left(\frac{d}{d\theta}\hat{\mathbf{r}}\right)\frac{d\theta}{dt} = \hat{\theta}\frac{d\theta}{dt} = \hat{\theta}\dot{\theta} \\
\frac{d}{dt}\hat{\theta} &= \left(\frac{d}{d\theta}\hat{\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -\hat{\mathbf{r}}\frac{d\theta}{dt} = -\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta}
\end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}(r(t)\hat{\mathbf{r}}(t)) = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r(t)\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \\
v &= |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} \\
\mathbf{a} &= \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\theta}(-\hat{\mathbf{r}}) \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}.
\end{aligned}$$

3 Et lite resultat om areal og akselerasjon

(Herfra og ut vil du finne mesteparten i 11.6, men deler av det vil være ting vi har gjennomgått fra kapittel 8.)

Det vi har gjort over er vel og bra, men la oss prøve å bruke det til noe.

Setning 1 *Gitt en parametrisert kurve* $\mathbf{r}(t)$*. Hvis akselerasjonen kun er i radial retning vil arealet som radialvektoren sveiper over ha konstant endringsrate.*

Husk at vi tidligere har vist at hvis rotasjonen/vinkelen til posisjonen endrer seg fra θ til $\theta + \Delta\theta$ har vi at

$$\Delta A \approx \frac{1}{2}r(\theta)^2\Delta\theta.$$

Dette gir

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta A}{\Delta\theta}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \approx \frac{\frac{1}{2}r(\theta)^2\Delta\theta}{\Delta\theta}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

og hvis vi lar Δt gå mot null får vi

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r(\theta)^2\dot{\theta}.$$

At arealet har konstant endringsrate betyr at $\frac{dA}{dt}$ er konstant, som er det samme som at $\frac{d^2A}{dt^2} = 0$.

$$\frac{d^2A}{dt^2} = \frac{1}{2}2r\dot{r}\dot{\theta} + \frac{1}{2}r^2\ddot{\theta} = \frac{1}{2}r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}).$$

At akselerasjonen kun er i radial retning betyr at $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$ (se forrige avsnitt). Dermed har vi bevist setningen.

La oss se om vi kan bruke dette til noe.

4 En anvendelse av det vi har gjort — Keplers lover for planetbaner

La oss starte med en repetisjon fra fysikken. Jeg håper dette er lesbart også for dere som ikke har hatt noe fysikk, men skulle du synes dette virker meningsløst kommer det et sammendrag uten fysikk til slutt.

4.1 Newtons 2. bevegelseslov

Gitt et legeme med masse m som påvirkes av en kraft $\mathbf{F}$. Da har vi at denne kraften medfører en akselerasjon $\mathbf{a}$ av legemet, og at sammenhengen er

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

4.2 Newtons gravitasjonslov

Anta at solen har masse M og en planet har masse m. La $\mathbf{r}$ være posisjonsvektor fra solen til planeten. Da har vi at

$$\mathbf{F} = -g\frac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

der g er en konstant.

Dette, sammen med Newtons 2. lov, sier at akselerasjonen som forårsakes av tyngdekraften er radiell og omvendt proporsjonal med kvadratet av avstanden mellom legemene. Hvis du vil ha et helt fysikkfritt sammendrag, her kommer det: Vi skal se på kurver parametrisert ved $\mathbf{r}(t)$ der

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{K}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

der K er en konstant. Om det blir mer meningsfylt når det fjernes fra en naturlig situasjon vet jeg ikke, men der fikk du det. Vi skal altså se hva vi kan si om slike kurver. For at du skal kunne lese videre: $K = gmM$.

4.3 Keplers lover

1. Planetbanene er ellipser med solen i det ene brennpunktet.
2. Brennpunktradien fra solen sveiper over areal med konstant fart.
3. Kvadratet av omløpsperioden er proporsjonal med kubikken av den store aksen i ellipsen.

En annen versjon av den tredje loven er: Kvadratet av omløpsperioden er propoprsjonalt med kubikken av gjennomsnitsavstanden til sola. Se om du kan vise dette selv.

Vi skal nå vise at Keplers lover følger av de to lovene til Newton som vi har nevnt over. (Den historiske rekkefølgen er motsatt, men det er en annen historie.) Vi skal forenkle situasjonen til å anta at systemet ikke er påvirket av andre planeter.

Planetbanen er i et plan (og litt til): Vi vet fra Newtons 2. lov og gravitasjonsloven at posisjonsvektoren og akselerasjonsvektoren er parallelle. Hva med fartsvektoren? Vi kan foreksempel se på hvordan den står i forhold til posisjonsvektoren, for eksempel ved å se på $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$. Deriver dette med hensyn på tiden, så får vi at

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Dermed vet vi at $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ er konstant, la oss skrive

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}.$$

Dette gir oss at $\mathbf{r} \cdot \mathbf{h} = 0$, så alle posisjonsvektorene står normalt på $\mathbf{h}$, altså må planetbanen ligge i et plan. Ved litt regning finner vi også at

$$h = |\mathbf{h}| = r^2\dot{\theta} \qquad \text{eller} \qquad \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

Keplers 2. lov: Vi har nettopp vist at planetbanen er i et plan. Vi vet også at akselerasjonen er i radiell retning, så vi kan bruke resultatet fra forrige avsnitt om slike kurver.

Hamiltons setning: For solen og planeten har vi, fra Newtons to lover, at

$$\mathbf{a} = -\frac{gM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{gM}{r^3}\mathbf{r},$$

Kjerneregelen gir oss at

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{d\theta}\dot{\theta}$$

så

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\theta} = \frac{\dot{\mathbf{v}}}{\dot{\theta}} = \frac{-\frac{gM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}}{\frac{h}{r^2}} = -\frac{gM}{h}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{gM}{h}(\cos\theta, \sin\theta).$$

Hvis vi antideriverer (med hensyn på θ) får vi da

$$\mathbf{v} = -\frac{gM}{h}(\sin\theta, -\cos\theta) + (C_1, C_2) = \frac{gM}{h}\hat{\theta} + \mathbf{C}$$

Dette gir oss Hamiltons setning:

$$|\mathbf{v} - \mathbf{C}| = \frac{gM}{h},$$

eller at hastighetsvektoren tegner en sirkel med sentrum i $\mathbf{C}$.

Keplers 1. lov: Vi har så langt sett at planetbanen er i et plan og at sola er i dette planet. Ta sola som origo, og ta vektoren $\mathbf{C}$ til å definere positiv y-retning. La ε være det tallet som gir $|\mathbf{C}| = \frac{\varepsilon gM}{h}$. Da har vi

$$\mathbf{v} = \frac{gM}{h}(\hat{\theta} + \varepsilon\mathbf{j}).$$

La $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ bestemme positiv z-retning. Dette gir oss også x-retningen. Litt regning gir oss

$$\begin{aligned}
h\mathbf{k} &= \mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \frac{gM}{h}(\hat{\theta} + \varepsilon \mathbf{j}) = \frac{gM}{h}(\mathbf{r} \times \hat{\theta} + \mathbf{r} \times \varepsilon \mathbf{j}) \\
&= \frac{gM}{h}(r\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\theta} + (r\cos\theta \mathbf{i} + r\sin\theta \mathbf{j}) \times \varepsilon \mathbf{j}) = \frac{gM}{h}(r\mathbf{k} + r\varepsilon\cos\theta\mathbf{k} + 0) \\
&= \frac{gM}{h} r(1 + \varepsilon\cos\theta)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Dette gir oss

$$r = \frac{\frac{h^2}{gM}}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

Som vi vet beskriver dette et kjeglesnitt, og størrelsen på ε, som avhenger av hastigheten og tyngdekraften, avgjør om vi får en ellipse, en parabel eller en hyperbel.

Arealet til en ellipse: $x(t) = a\cos t,\ y(t) = b\sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$ er en parametrisering av en ellipse med akser $2a$ og $2b$. Vi kan for eksempel regne ut arealet med

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} x(t)y'(t)dt &= \int_0^{2\pi} a\cos tb\cos tdt = ab\int_o^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2tdt \\
&= ab\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \pi ab
\end{aligned}$$

Keplers 3. lov: Vi har tidligere sett at $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ og $h = r^2\dot{\theta}$, så

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2}.$$

Hvis omløpstiden er T gir dette oss at $A = Th/2$. Hvis ellipsen har store og lille halvakser a og b vet vi at arealet er $A = \pi ab$. Vi vet også at $b^2 = la = \frac{h^2}{gM}a$, så vi får

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{gM}a^3.$$

Legg merke til at h, som kom fra posisjonen og hastigheten, er forsvunnet. Det eneste variable vi sitter igjen med i proporsjonalitetskonstanten er massen til solen. Legg også merke til at vi vet at vi har fått et kjeglesnitt, og at hvilket av de tre alternativene vi har vil avhenge av posisjonen og hastigheten i forhold til solen, samt solens masse. (Er du enig med meg i det? Kan du forklare dette ut fra det som står i teksten her?)