# Oppgave 3.3.54

I det første øvingssettet var en av oppgavene 3.3.54 fra boka, som ber deg løse ligningen

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = a \qquad \text{der} \quad a > 0.$$

Oppgaven har fått en stjerne, som vel skulle si noe. Aller først et par kommentarer til oppgaven slik den står i boka. Formuleringen skulle antyde at dette skulle være mulig å løse for alle positive $a$, men det er ikke mulig. Vi skal se nedenfor at vi i hvertfall ikke kan løse ligningen for $a$ større enn $e^{1/e}$. Den andre kommentaren gjelder stjernen. Enten har han vært litt generøs med den, eller veldig restriktiv. Hvis du skal fullføre oppgaven ordentlig, burde den hatt hvertfall tre stjerner, og hvis vi bare krever utregningen som snart kommer, tror jeg du vil finne mange oppgaver som ikke har stjerne som du vil synes er vanskeligere. Nok om det, la oss se på oppgaven.

Det aller første som slår meg er at jeg må gi mening til venstre side. Hvis du ikke har sett på notatet om logaritmer og eksponensialfunksjoner ennå er det kanskje på tide. I merknad 10 nederst på side 9 står det noe som er relevant for oss, nemlig at vi skal tolke venstre side som

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = x^{\left(x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}\right)}.$$

Du kan si at dette hjalp jo ikke mye, hvis jeg ikke forstår hva som står på venstre side, forstår jeg heller ikke hva som står på høyre side, for der dukker jo det samme problemuttrykket opp igjen, så høyre siden ser i beste fall like ille ut.

$$\begin{aligned} x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} &= a \\ x^{\left(x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}\right)} &= a \end{aligned}$$

Hvis jeg nå tar logaritmen av hver side får jeg

$$\begin{aligned} \ln\left(x^{\left(x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}\right)}\right) &= \ln a \\ x^{\left(x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}\right)} \ln x &= \ln a \\ a \ln x &= \ln a. \end{aligned}$$

For å få den siste likheten har vi rett og slett brukt at $x^{\left(x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}\right)} = a$. Hvis vi rydder opp, har vi nå fått

$$\ln x = \frac{\ln a}{a}$$

som gir

$$x = a^{1/a}.$$

Det ser med andre ord ut som vi kunne komme frem til et svar uten å vite hva vi holdt på med. Dette er nesten riktig, men bare nesten! Det vi har vist, er at *hvis* vi har en løsning (noe det ser ut fra oppgaven at vi skulle ha) *så* må dette være løsningen. Men vi har *ikke* alltid en løsning! Vi er enige om at $a$ må være positiv, men det alene holder ikke. Vi blir kanskje fort enige om at vi får til dette når $x = a = 1$, og at venstre side ikke gir mening allerede for $x = 2$. Deretter er det mer utfordrende. En måte vi kan se at vi har et problem er følgende. Se på funksjonen

$$f(a) = a^{1/a}.$$

Dette er en fin og veldefinert funksjon for positive $a$. Hvordan ser den ut? Den burde hvertfall være stigende for $0 < a < 1$. (Se om du kan overbevise deg selv om det uten å derivere.) Når vi skal derivere $f$ kan det lønne seg å skrive $f(a) = a^{1/a} = e^{\ln a/a}$. Uansett hvordan vi gjør det, så får vi

$$f'(a) = \frac{1 - \ln a}{a^2} a^{1/a}.$$

Alt, med unntak av telleren, er positivt hele tiden, så vi ser at $f$ er strengt stigende for $0 < a < e$, strengt avtagende for $a > e$ og har et toppunkt for $a = e$. (Hvis du vil lage en skisse av grafen, som sikkert er en god ide, kan det være greit å vite at $\lim_{a\to 0^+} f(a) = 0$, $\lim_{a\to\infty} f(a) = 1$ og $f(e) = e^{1/e}$. Sjekk dette selv!)

Hva forteller dette oss? Hvis du fremdeles husker hva oppgaven dreier seg om, så ser du at $f(a)$ forteller oss hva $x$ må være, for en gitt $a$. Men hvis du nå ser på skissen din for $f$ så ser du at det alltid vil være to $a$ verdier som skulle få den samme $x$ verdien. Det vil si at for denne $x$-en skulle $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ gi to forskjellige tall (de to $a$ verdiene). Dette kan selvfølgelig ikke være mulig, altså må noe ha gått galt. Det som har gått galt, er at venstre side i den opprinnelige ligningen vår ikke har mening for $x$ verdier som er for store. Nedenfor skal vi være litt mer presise, men siden dette er overlatt som en utfordring til dere, kommer jeg ikke til å si veldig mye. Uansett, det kan være fristende å gjette at alt går bra for $0 < a < e$, men selv det blir galt. Det skal vise seg at vi får problemer når $a$ blir for liten også. . . .

Litt mer om hva venstre siden i ligningen vår skal bety. Start med et tall $x$. $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ har uendelig mange $x$-er, hvordan skal vi ta tak i det? Vi kan lage oss en følge, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ og si at $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ skal være $\lim_{n\to\infty} x_n$. Når du lager denne følgen, husk på Merknad 10 på bunnen av side 9 i notatet om logaritmer og eksponensialfunksjoner. (Som en sjekk for deg selv på at du har forstått det som står der kan du prøve å forklare hvorfor vi gjør som vi gjør nedenfor, i stedet for noe som kanskje hadde vært mer fristende.) La oss, for denne $x$-verdien vi har fått utdelt, sette

$$\begin{aligned}
x_1 &= x \\
x_2 &= x^x = \\
x_3 &= x^{x^x} = x^{x_2} \\
x_4 &= x^{x^{x^x}} = x^{x_3} \\
&\vdots \\
x_n &= x^{x_{n-1}} \\
x_{n+1} &= x^{x_n} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Nå kan du jo prøve deg med $x = 1$ og $x = 2$ og se hva som skjer med disse. Når du har gjort det kan du se hvordan tallet $e^{1/e}$ plasserer seg i forhold til 1 og 2. Jeg håper du har fått inntrykk av at når $x$ er for stor, så divergerer følgen mot uendelig, så det er ikke noe tall på venstre side av ligningen vår som vi kan ta logaritmen av. Det er det som er problemet vårt. Det er nå fristende å gjette at følgen konvergerer for $0 < x < e^{1/e}$ (hvorfor?). Det er bare delvis riktig. Som nevnt over, får du et problem når $x$ er liten. Det du kanskje kan prøve på først er å se om følgen konvergerer for $1 \leq x \leq e^{1/e}$. (Hvis ord som "følge" og "konvergens og divergens av følger" er gresk for deg, så kikk i 9.1 i læreboka.) Hvis du greier konvergens for $1 \leq x \leq e^{1/e}$ kan du jo se om du klarer å sjekke konvergens for en del $x$ som er mindre enn 1. Når du har fått til det, kan du ta en $x$ som er mindre enn den minste du har greid å sjekke konvergens for. Regn ut en del ledd i følgen for denne $x$-verdien. Hva ser du? Hvis du ikke greier å gjette på et system her, prøv et par andre små $x$ verdier. Hva ser det ut som skjer? Klarer du vise dette?

Deler av dette er det nok en del av dere som vil finne ut av, men det er nok noe som faller utenfor kurset og som kan bli for vanskelig. Det er en fin oppgave å ha i bakhodet og pusle med, men ikke bruk så mye tid på den at du ikke får gjort det du skal. Oppgaven er ment som en utfordring.

Som vanlig: send meg en epost hvis noe er uklart eller du finner noen feil.