Øving 1 – andre oppgaver

Vi vil vise at hvis $f(xy) = f(x) + f(y)$ ⊛ gjelder for alle x og y for en funksjon med hele tall-linjen som definisjonsmengde, så må $f(x) = 0$ for alle x.

Hvis ⊛ er sann for alle x og y, så må ⊛ gjelde spesielt for $y = 0$ (og hvilken som helst x). Setter vi inn får vi: $f(x \cdot 0) = f(x) + f(0)$

m.a.o. $f(0) = f(x) + f(0)$.

Hvis vi trekker fra $f(0)$ på hver side får vi $f(x) = 0$, som var det vi skulle vise.

Øving 2 Andre oppgaver (oppg. 2 s.10 i notat)

Vi har gitt ① $f(x)$ er deriverbar

② $f'(x) = \frac{1}{x}$

③ $f^{-1}(x) = e^x$

$$f \circ f^{-1}(x) = x$$

Hvis vi deriverer hver side med hensyn på x (bruk kjerneregelen) får vi

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$ som gir

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$ ④

[Det er dette det e antydet i oppgaven at du kan bruke]

Sett inn ② & ③ i høyre side av ④, så får vi

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

som var det vi skulle vise.

Her er ~~..~~bevis for litt av setning 9 i notatet (oppg 3 s. 10)

Vi har gitt $\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$ ①

$a^x = e^{x \ln a}$ ②

og vet fra før at

③ $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

④ $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

⑤ $\ln xy = \ln x + \ln y$

⑥ $e^{x+y} = e^x e^y$

---

1. $\frac{d}{dx}(a^x) \underset{②}{=} \frac{d}{dx}\left(e^{x \ln a}\right) = \ln a \cdot e^{x \ln a} = (\ln a) \cdot a^x$

kjerneregelen & ③

2. $\frac{d}{dx} \log_a x \underset{①}{=} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln a} \ln x\right) = \frac{1}{\ln a} \frac{d}{dx} \ln x$

$\underset{④}{=} \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$

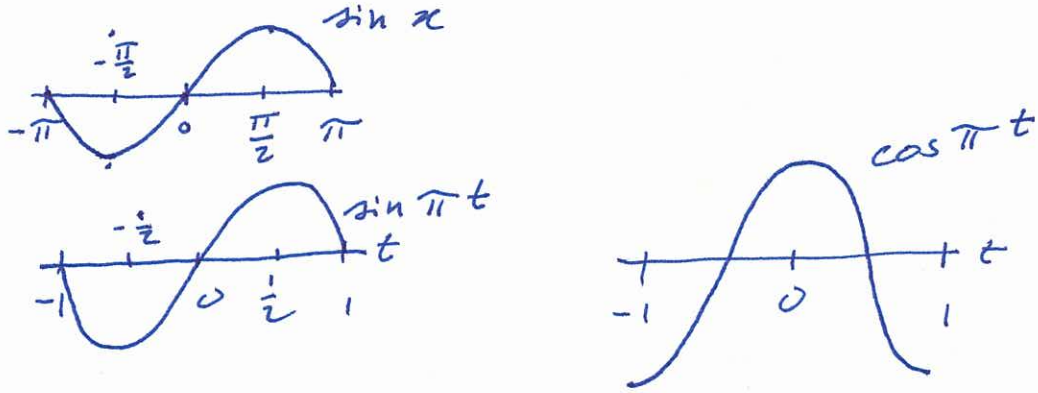
6. $a^{x+y} \underset{②}{=} e^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} =$

$\underset{⑥}{=} e^{x \ln a} e^{y \ln a} \underset{②}{=} a^x a^y$

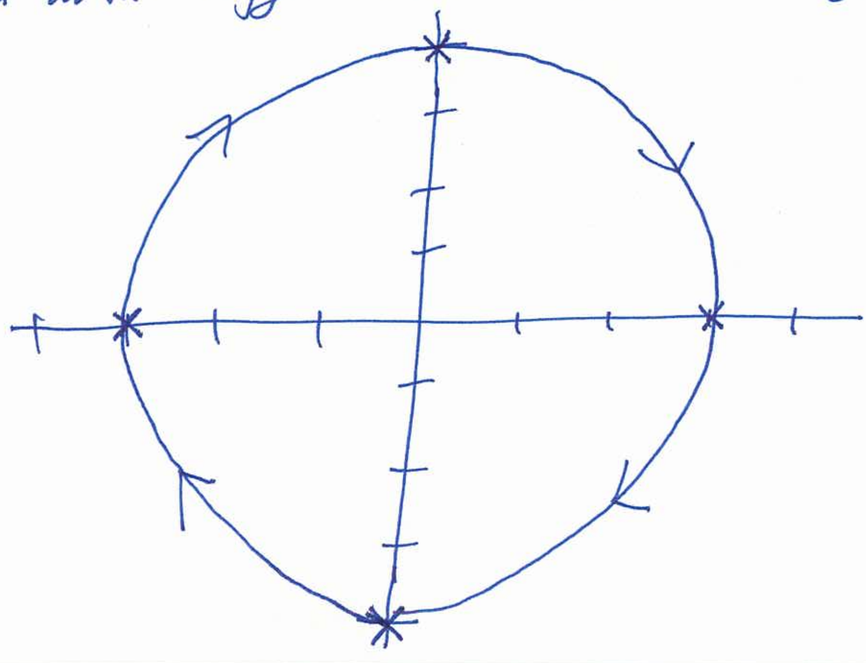
8.2.7

$$\left.\begin{aligned} x &= 3\sin \pi t \\ y &= 4\cos \pi t \end{aligned}\right\} \quad -1 \leq t \leq 1$$

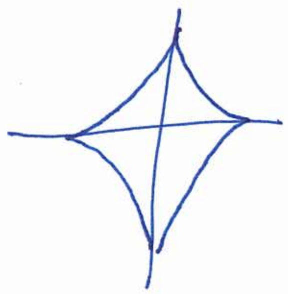
Når t går fra -1 til 1
går πt fra $-\pi$ til π



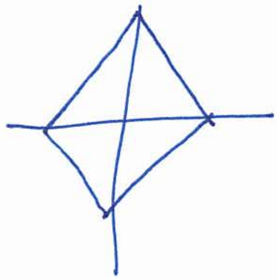
Fra grafene over ser vi at
kurven starter i $(0,-4)$
så avtar x mot -3 $(t = -\frac{1}{2})$ mens y øker til 0
så øker x til 0, mens y fortsetter å øke til 4
så fortsetter x å øke til 3 $(t = \frac{1}{2})$ mens y nå avtar til 0
så avtar begge mot $(0,-4)$ igjen.



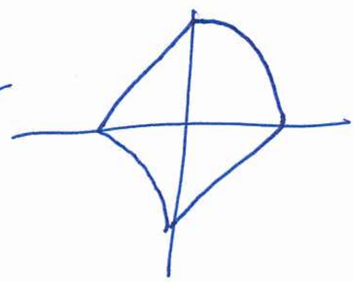
Beskrivelsen gitt før skissen kunne like gjerne gitt



eller



eller



eller....

La oss derfor se på tangentene

$$x'(t) = 3\pi \cos \pi t$$
$$y'(t) = -4\pi \sin \pi t$$

ved å sette inn $t = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ ser vi at kurven har horisontale tangenter i $(0, \pm 4)$ og vertikale tangenter i $(\pm 3, 0)$. Vi kan også se på stigningstallet til tangenten, eller på de andrederiverte x'' og y'', for å se at grafen skal krumme slik den gjør på forrige side.

Nok en mulighet for å se mer på hvordan kurven skal se ut, er å se at dette er en ellipse. Vi har nemlig at

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \left(\frac{3\sin\pi t}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\cos\pi t}{4}\right)^2$$

$$= \sin^2\pi t + \cos^2\pi t = 1.$$

8.2.15 $\quad y = x^2$

I et punkt (x, x^2) på kurven har tangenten stigningstall $m = y' = 2x$. Dette gir

$$x = \frac{1}{2}m$$
$$y = \frac{1}{4}m^2 \qquad m \in \mathbb{R}.$$

11.6.3 Dette er hovedsakelig en øvelse i å manipulere ligninger (og å forstå oppgaveteksten).

—— ∘ ——

① $r = e^{\theta}$. En partikkel går langs denne kurven med enhets hastighet (dvs $v = 1$). ②

Det står ingenting om hvilken retning (mot klokka og utover i spiralen eller med klokka og innover i spiralen) men vi vil anta at vi går mot klokka.

Da får vi $\dot{r}$ & $\dot{\theta} > 0$ (som gitt i fasiten i bdha. Ellers får vi motsatt fortegn).

Av latskap innfører vi følgende notasjon:

v_r : radialkomponenten til farten
v_T : transversalkomponenten —"—
a_r : radialkomponenten til akselerasjonen
a_T : transversalkomponenten til —"—

Fra s. 629-630 får vi da:

③ $v_r = \dot{r} = \left(\frac{d}{dt} r\right)$

④ $v_T = r\dot{\theta} = r\left(\frac{d}{dt}\theta\right)$

⑤ $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

⑥ $a_T = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

⑦ $v = \sqrt{v_r^2 + v_T^2}$

Ved å derivere ① m.h.p. t på hver side får vi

$$(8) \quad \dot{r} = \dot{\theta} e^{\theta} = \dot{\theta} r$$

Men ⑧, ③ og ④ sier da at vi får

$$v_r = v_T$$

Setter vi dette inn i ⑦ & ② får vi $\sqrt{2 v_r} = \sqrt{2 v_T} = 1$

eller $v_r = v_T = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Vi har valgt å gå utover/mot klokka, så

$$v_r = v_T = \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

Legg merke ⑨ til at $v_r = \dot{r}$ er konstant, så $\ddot{r} = 0$. Vi har også $v_T = r\dot{\theta}$ konstant, så $\frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$ ⑩

Fra $v_T = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ får vi også

$$\dot{\theta} = \frac{e^{-\theta}}{\sqrt{2}} \quad (11) \qquad (r = e^{\theta})$$

Som gir oss

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta} = 0 - r\dot{\theta}\cdot\dot{\theta} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-\theta}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{-\frac{e^{-\theta}}{2}}}$$

$$a_T = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \overset{(10)}{=} \dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-\theta}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{e^{-\theta}}{2}}}$$