Øving 9

9.5.23

$$\frac{1}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$$

[Magefølelsen min sier: i forhold til x^n betyr $n+3$ lite, så jeg gjetter samme konvergensradius som $\sum x^n$, m.a.o. 1. Endepunktene blir kanskje litt forskjellig.]

Jeg prøver forholdstesten for å finne ut når rekken er absolutt konvergent:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)+3}\right|}{\left|\frac{x^n}{n+3}\right|} = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{n+3}{n+4}$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}} = |x|$$

Dermed vet vi at rekken konvergerer når $|x| < 1$ og divergerer for $|x| > 1$.

Når $x = 1$ får vi rekken $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$
$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ som vi vet divergerer

Når $x = -1$ får vi rekken $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$
$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^{n+1}$ som er en alternerende

rekke der leddene er avtagende i størrelse mot null, så vi vet at denne rekken konvergerer. Altså har rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$ konvergensområde

$[-1, 1)$.

Hva konvergerer rekken mot?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} = \frac{1}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{5} + \cdots$$

Jeg kjenner $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, som ligner litt. Hvis jeg ~~integ~~ antideriverer, får jeg noe som ligner mer:

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

Hvis jeg skal starte med å „dele på 3" kan jeg se på $x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$ og antiderivere:

$$x^2+x^3+x^4+\cdots = -(1+x)+1+x+x^2+\cdots$$

$$= \frac{1}{1-x} - 1 - x$$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} - 1 - t \, dt = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^x t^n \, dt = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots$$

Som er nesten det vi skal ha.
Faktoriser ut x^3 fra hvert ledd, så får vi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n+1} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$$

$$= x^3\left(\frac{1}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{5} + \cdots\cdots\right)$$

Samtidig har vi

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} - 1 - t \, dt = -\ln|1-t| - t - \frac{t^2}{2}\Big|_0^x$$

$$= -\ln|1-x| - x - \frac{x^2}{2}$$

Så vi får

$$-\ln|1-x| - x - \frac{x^2}{2} = x^3\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}\right)$$

Dette er gyldig på hele konvergens-området til $\sum x^n$, m.a.o. på $(-1,1)$.

Vi har to ting vi må passe på nå:

a) Vi kan ikke uten videre dele på x^3, for vi bryr oss også om hva som skjer når $x=0$

b) Hva skjer når $x=-1$?

La oss ta det siste først:

I nærheten av $x=-1$ er venstre side i ligningen nederst på forrige side kontinuerlig. Det samme er x^3.

I følge Abels setning er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$ kontinuerlig på hele konvergensområdet, her $[-1,1)$.

Hvis vi lar x gå mot -1 fra høyre får vi dermed at ligningen nederst på forrige side holder, også når $x=-1$.

Når $x=0$ vet vi hva summen av rekken er:

$$\frac{1}{3}+\frac{0}{4}+\frac{0^2}{5}+\cdots = \frac{1}{3}.$$

Dermed har vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} = \begin{cases} \dfrac{-\ln|1-x| - x - x^2/2}{x^3} & \text{for } -1 \leq x < 0 \text{ og } 0 < x < 1 \\[2ex] \dfrac{1}{3} & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

Vi har faktisk vist at

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\ln|1-x| - x - x^2/2}{x^3} = \frac{1}{3}$$

(Du kan bruke et kontinuitetsargument slik vi gjorde for $x = -1$.)

Du kan jo sjekke dette med f.eks. l'Hôpital.

Øving 9, andre oppgaver, 1.2.1

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

x^2 og $(1+x^2)^n$ er kontinuerlige funksjoner, $x^2 \geq 0$, så $1+x^2 > 0$, så $(1+x^2)^n > 0$. Dermed deler vi aldri med null, så for alle heltall n er

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad \underline{\text{kontinuerlig}}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$ har bare positive ledd ($x^2 \geq 0$) så vi kan bruke forholdstesten direkte.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}}{\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Når $x \neq 0$ får vi $\frac{1}{1+x^2} < 1$, så forholdstesten gir at følgen konvergerer når $x \neq 0$. Når $x = 0$ er alle leddene

i rekken null, så rekken konvergerer
i dette tilfellet også.

Dermed konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$
for alle x på tallinjen

[Hvis rekken konvergerer uniformt vet vi
at summen også må være kontinuerlig.
(Det motsatte er ikke nødvendigvis sant!)
Vi kunne derfor prøvd å vise uniform
konvergens. La oss heller følge hintet.]

Vi har fått et hint om å se på rekken
som en geometrisk rekke:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$$

$$= x^2 \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = x^2 \frac{1+x^2}{x^2} = 1+x^2$$

hvis $\frac{1}{1+x^2} < 1$

Forutsetningen $\frac{1}{1+x^2} < 1$ er det samme som $x^2 > 1$, eller $x \neq 0$.

Når $x = 0$ er det lett å finne summen: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0+0+\cdots = 0$

Dermed har vi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ 1+x^2 & \text{for } x \neq 0. \end{cases}$$

Denne funksjonen er tydelig diskontinuerlig i $x = 0$ ⌈⌈ $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 1+x^2 = 1$ mens $f(0) = 0 \neq 1$. ⌋⌋

⌈⌈ Ang. den forrige kommentaren: Det var greit at vi ikke prøvde å vise uniform konvergens, for det vi har vist må medføre at rekken (dvs. følgen av delsummene) ikke er uniformt konvergent. ⌋⌋