Øving 10

Andre oppgaver 1.2.1

Vis at følgen $f_n(x) = x^n$ konvergerer uniformt på $[0, \frac{1}{2}]$:

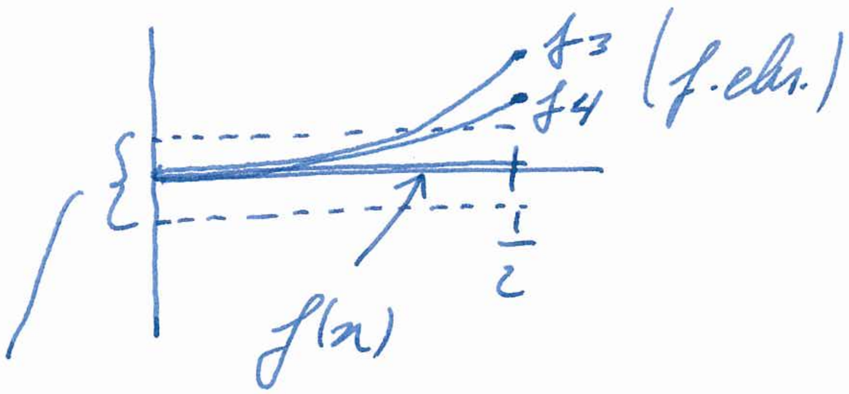
Hvis følgen konvergerer uniformt må det være mot noe, og i såfall det samme som den konvergerer mot punktvis:

La $x \in [0, \frac{1}{2}]$ være et tall

Da ~~vet~~ vi at $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

Vi må sjekke at for ethvert gitt tall ε, så kan vi være sikre på at $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, der $f(x) = 0$, hvis n er stor nok, og at denne n-en skal holde for alle x på intervallet.

Tenk på dette som at ε er et mål på tykkelsen av en „pølse" rundt grafen til f, og vi må sikre at hele grafen til f_n er inni denne pølsa.



"ε-pølse rundt f(x)"

En måte å gjøre dette på er å se på:

„Når er avstanden mellom grafen til $f(x)$ og grafen til $f_n(x)$ størst?"

M.a.o. finn maksimum til

$|f_n(x) - f(x)|$ og se om dette er lite.

For oss har vi

$$\max_{0 \le x \le \frac{1}{2}} |f_n(x) - f(x)| = \max_{0 \le x \le \frac{1}{2}} |x^n - 0|$$

$$= \max_{0 \le x \le \frac{1}{2}} x^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

Hvis du velger en ε, trenger vi å få $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Får vi til det er hele grafen til f_n innenfor ε-pølsen rundt f.

Legg merke til at hvis $k \geq 0$,

så er $\frac{1}{2^{n+k}} < \frac{1}{2^n}$, så hvis

f_n er i ε-pølsen, så er grafen til

f_{n+k} det også!

For en gitt ε, ta f.eks. $n = \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2} + 1$.

Da vet vi at

$$\max_{0 \leq x \leq \frac{1}{2}} |f_{n+k}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

~~for alle~~ for alle $k \geq 0$,

så

$$|f_{n+k}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

for alle $k \geq 0$ og for alle $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

[Dette kan godt skrives kortere, men var ment som litt hjelp hvis du sliter med begrepet.]

Frivillige andre oppgaver 2.2.1

Samme som over, men nå med intervall $[0,1]$.

Den punktvise grensen blir nå

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{for } x = 1 \end{cases}$$

Dermed har vi

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{for } x = 1 \end{cases}$$

Uansett hvilken n vi tar, kan vi nå få $|f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{2}$ hvis vi bare tar x nærme nok 1.

(Ta $x = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{n}}$, så får du $|f_n(x) - f(x)| = \frac{3}{4}$)

Dermed kan vi aldri få hele grafen til f_n innenfor en „$\frac{1}{2}$-pølse" (pølse med bredde $\frac{1}{2}$) rundt $f(x)$, uansett hvilken n vi tar. For uniform konvergens må vi få til dette for alle „pølser", så vi har ikke uniform konvergens her.

~~F~~ Frivillige andre oppgaver 2.2.2

Se løsningsforslag for øving 9.

f_n er kontinuerlige

Hvis konvergensen er uniform vet vi at da må også f være kontinuerlig.

Samtidig vet vi at f ikke er kontinuerlig. Dermed kan ikke konvergensen være uniform.

Alternativt kan du se på

$$s_n(x) = 1+x^2 - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$$ (dette gjelder også for $x=0$...)

Da får du

$$|s_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

(fyll inn detaljene i regnestykket selv!)

På samme måten (nesten) som i 2.2.1 kan vi se at når $\varepsilon > 0$ ~~er~~ er valgt ~~[illegible]~~ og mindre enn 1 (f.eks $= \frac{1}{2}$ som vi gjorde i 2.2.1) ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~. Så kan vi for enhver n finne en x (nærme null) slik at $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n > \varepsilon$. ~~[illegible]~~ Dermed konvergerer ~~[illegible]~~ følgen ikke uniformt

Øving 9

9.5.23

$$\frac{1}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$$

[Magefølelsen min sier: i forhold til x^n betyr $n+3$ lite, så jeg gjetter samme konvergensradius som $\sum x^n$, m.a.o. 1. Endepunktene blir kanskje litt forskjellig.]

Jeg prøver forholdstesten for å finne ut når rekken er absolutt konvergent:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)+3}\right|}{\left|\frac{x^n}{n+3}\right|} = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{n+3}{n+4}$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}} = |x|$$

Dermed vet vi at rekken konvergere når $|x| < 1$ og divergerer for $|x| > 1$.

Når $x = 1$ får vi rekken $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$$ som vi vet divergerer

Når $x = -1$ får vi rekken $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^{n+1}$$ som er en alternerende

rekke der leddene er avtagende i størrelse mot null, så vi vet at denne rekken konvergerer. Altså har rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$ konvergensområde

$[-1, 1)$.

Hva konvergerer rekken mot?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} = \frac{1}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{5} + \cdots$$

Jeg kjenner $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, som ligner litt. Hvis jeg ~~integ~~ antideriverer, får jeg noe som ligner mer:

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

Hvis jeg skal starte med å „dele på 3" kan jeg se på $x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$ og antiderivere:

$$x^2+x^3+x^4+\cdots = -(1+x)+1+x+x^2+\cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{1-x} - 1 - x$$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} - 1 - t \, dt = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^x t^n \, dt = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots$$

Som er nesten det vi skal ha.
Faktoriser ut x^3 fra hvert leddet, så får vi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n+1} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$$

$$= x^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{5} + \cdots\cdots \right)$$

Samtidig har vi

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} - 1 - t \, dt = -\ln|1-t| - t - \frac{t^2}{2} \Big|_0^x$$

$$= -\ln|1-x| - x - \frac{x^2}{2}$$

Så vi får

$$-\ln|1-x| - x - \frac{x^2}{2} = x^3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} \right)$$

Dette er gyldig på hele konvergens-området til $\sum x^n$, m.a.o. på $(-1, 1)$.

Vi har to ting vi må passe på nå:

a) Vi kan ikke uten videre dele på x^3, for vi bryr oss også om hva som skjer når $x = 0$

b) Hva skjer når $x = -1$?

La oss ta det siste først:

I nærheten av $x = -1$ er venstre side i ligningen nederst på forrige side kontinuerlig. Det samme er x^3.

I følge Abels setning er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$ kontinuerlig på hele konvergensområdet, her $[-1, 1)$.

Hvis vi lar x gå mot -1 fra høyre får vi dermed at ligningen nederst på forrige side holder, også når $x = -1$.

Når $x = 0$ vet vi hva summen av rekken er:

$$\frac{1}{3} + \frac{0}{4} + \frac{0^2}{5} + \cdots = \frac{1}{3}.$$

Dermed har vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} = \begin{cases} \dfrac{-\ln|1-x| - x - x^2/2}{x^3} & \text{for } -1 \le x < 0 \text{ og } 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{3} & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

[Vi har faktisk vist at

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\ln|1-x| - x - x^2/2}{x^3} = \frac{1}{3}$$

(Du kan bruke et kontinuitetsargument slik vi ~~?~~ gjorde for $x = -1$.)

Du kan jo sjekke dette med f. eks. l'Hôpital.]

Øving 9, andre oppgaver, 1.2.1

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

x^2 og $(1+x^2)^n$ er kontinuerlige funksjoner, $x^2 \geq 0$, så $1+x^2 > 0$, så $(1+x^2)^n > 0$.

Dermed deler vi aldri med null, så for alle heltall n er

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad \underline{\text{kontinuerlig}}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$ har bare positive ledd ($x^2 \geq 0$) så vi kan bruke forholdstesten direkte.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}}{\frac{x^2}{(1+x^2)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Når $x \neq 0$ får vi $\frac{1}{1+x^2} < 1$, så forholdstesten gir at følgen konvergerer når $x \neq 0$. Når $x = 0$ er ~~[illegible]~~ alle leddene

i rekken null, så rekken konvergerer
i dette tilfellet også.

Dermed konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$

for alle x på tallinjen

[Hvis rekken konvergerer uniformt vet vi
at summen også må være kontinuerlig.
(Det motsatte er ikke nødvendigvis sant!)
Vi kunne derfor prøvd å vise uniform
konvergens. La oss heller følge hintet.]

Vi har fått et hint om å se på rekken
som en geometrisk rekke:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$$

$$= x^2 \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = x^2 \frac{1+x^2}{x^2} = 1+x^2$$

hvis $\frac{1}{1+x^2} < 1$

Forutsetningen $\frac{1}{1+x^2} < 1$ er det samme som $x^2 > 1$, eller $x \neq 0$.

Når $x = 0$ er det lett å finne summen: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \dots = 0$

Dermed har vi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ 1+x^2 & \text{for } x \neq 0. \end{cases}$$

Denne funksjonen er tydelig diskontinuerlig i $x = 0$ [$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 1+x^2 = 1$

mens $f(0) = 0 \neq 1$.]

[Ang. den forrige kommentaren: Det var greit at vi ikke prøvde å vise uniform konvergens, for det vi har vist må medføre at rekken (dvs. følgen av delsummene) ikke er uniformt konvergent.]