Fra øving 12

17.7.1

Vi skal finne generelle løsninger til

$$y'' = (x-1)^2 y$$

som potensrekker på formen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

Hvis vi deriverer får vi

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \, (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1)(x-1)^n$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} (n+1) n \, (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1)(x-1)^n$$

Setter vi dette inn i ligningen får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1)(x-1)^n = (x-1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

eller

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1)(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} (x-1)^n$$

eller

$$a_2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (x-1)^0 + a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x-1)^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1)(x-1)^n$$

$$=^{*} 0 \cdot (x-1)^0 + 0 \cdot (x-1)^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} (x-1)^n$$

Fra den siste ligningen får vi

$$2a_2 = 0$$
$$6a_3 = 0$$

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) = a_{n-2} \quad \text{for } n \geq 2$$

eller

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-2}}{(n+2)(n+1)} \quad \text{— " —}$$

eller

$$a_n = \frac{a_{n-4}}{n(n-1)} \quad \text{for } n \geq 4$$

Legg merke til at vi ikke har noen føringer på a_0 & a_1, slik vi burde forvente, fordi vi er ute etter generelle løsninger. Så vi har

$$a_0 = a_0$$
$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = 0$$
$$a_3 = 0$$
$$a_4 = \frac{a_0}{4\cdot 3}$$
$$a_5 = \frac{a_1}{5\cdot 4}$$
$$a_6 = 0$$
$$a_7 = 0$$
$$a_8 = \frac{a_4}{8\cdot 7} = \frac{a_0}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3}$$
$$a_9 = \frac{a_5}{9\cdot 8} = \frac{a_1}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4}$$
$$a_{10} = 0$$

osv.

Fra $a_n = \frac{a_{n-4}}{n(n-1)}$ og listen over ser vi et system der

$$\left.\begin{array}{l} a_{4k+2} = 0 \\ a_{4k+3} = 0 \end{array}\right\} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$a_{4k} = \frac{a_{4(k-1)}}{4k(4k-1)} = \frac{a_{4(k-2)}}{4k(4k-1)\,4(k-1)(4(k-1)-1)}$$

$$= \cdots = \frac{a_0}{4k(4k-1)\cdot 4(k-1)\cdot(4(k-1)-1)\cdot 4(k-2)\cdot(4(k-2)-1)\cdots 4\cdot 3}$$

$$a_{4k+1} = \frac{a_{4(k-1)+1}}{(4k+1)(4k)} = \frac{a_{4(k-2)+1}}{(4k+1)(4k)(4(k-1)+1)(4(k-1))}$$

$$= \cdots = \frac{a_1}{(4k+1)(4k)(4(k-1)+1)(4(k-1))(4(k-2)+1)(4(k-2))\cdots 5\cdot 4}$$

La oss se om vi kan gjøre noe med nevnerne:

$$\underline{(4k)}(4k-1)\underline{(4(k-1))}(4(k-1)-1)\underline{(4(k-2))}(4(k-2)-1)\cdots$$

$$\cdots \underline{(4(\underbrace{k-(k-1)}_{1}))}(4(\underbrace{k-(k-1)}_{1})-1)$$

$$= \underbrace{4^k(k!)}_{\text{det som er streket under}} \cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 15\cdot \cdots (4k-1)$$

$$\underline{(4k+1)}(4k)\underline{(4(k-1)+1)}(4(k-1))\underline{(4(k-2)+1)}(4(k-2))\cdots$$

$$\cdots\; \underline{(4(k-(k-1))+1)}(4(k-(k-1)))$$

$$= 4^k(k!)\underbrace{5\cdot 9\cdot 13\cdot 17\cdot\,\cdots\,(4k+1)}_{\text{de som er streket under over.}}$$

Så vi får

$$y = a_0 + a_1(x-1) + a_4(x-1)^4 + a_5(x-1)^5 + a_8(x-1)^8 + \cdots$$

$$= a_0 + a_1(x-1) + \frac{a_0}{4\cdot 3}(x-1)^4 + \frac{a_1}{5\cdot 4}(x-1)^5 + \frac{a_0}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3}(x-1)^8 + \cdots$$

$$= a_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{4k}}{4^k(k!)\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdots(4k-1)}\right)$$

$$+ \; a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{4k}}{4^k(k!)\cdot 1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot 17\cdots(4k+1)}$$

17.7.3 Vi skal løse initialverdiproblemet

$$y'' + xy' + 2y = 0$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 2.$$

Fordi vi har initialverdier i $x=0$ ser vi på løsninger som er potensrekker med sentrum i $x=0$, m.a.o. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Deriverer vi får vi

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

Setter vi dette inn i ligningen får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + x\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

eller

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

eller

$$a_2 \cdot 2 \cdot x^0 + 2a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n n + 2a_n\right] x^n = 0$$

eller

$$[2a_2 + 2a_0] + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n(n+2)]x^n = 0$$

eller

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\big((n+1)a_{n+2} + a_n\big)x^n = 0$$

som gir $(n+2)((n+1)a_{n+2} + a_n) = 0$

eller $a_{n+2} = \dfrac{-a_n}{n+1}$ $\circledast$

Setter vi $x=0$ inn i rekkene for y og y' og bruker initialbetingelsene, får vi

$$a_0 = y(0) = 1$$

$$a_1 = y'(0) = 2$$

Bruker vi $\circledast$ får vi deretter

$$a_2 = \frac{-a_0}{1} = -1$$

$$a_3 = \frac{-a_1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{3} = \frac{a_0}{3\cdot 1} = \frac{1}{3\cdot 1}$$

$$a_5 = \frac{-a_3}{4} = \frac{a_1}{4\cdot 2} = \frac{2}{4\cdot 2}$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{5} = \frac{-a_0}{5\cdot 3\cdot 1} = \frac{-1}{5\cdot 4\cdot 1}$$

$$a_7 = \frac{-a_5}{6} = \frac{-a_1}{6\cdot 4\cdot 2} = \frac{-2}{6\cdot 4\cdot 2}$$

$\vdots$

$$\vdots$$

$$a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{(2k-1)} = \frac{a_{2k-4}}{(2k-1)(2k-3)} = \frac{-a_{2k-6}}{(2k-1)(2k-3)(2k-5)}$$

$$= \cdots = \frac{a_{2k-2k}(-1)^k}{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\cdots(3)\cdot 1}$$

$$= \frac{(-1)^k a_0}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k-1)} = \frac{(-1)^k\cdot 1}{(2k)!/(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k))}$$

$$= \frac{(-1)^k\, 2^k\,(k!)}{(2k)!} \quad \text{for } k=0,1,2,\ldots$$

$$a_{2k+1} = \frac{-a_{2k-1}}{2k} = \frac{a_{2k-3}}{2k(2k-2)} = \frac{-a_{2k-5}}{2k(2k-2)(2k-4)}$$

$$= \cdots = \frac{a_{2k+1-2k}\,(-1)^k}{(2k)(2k-2)(2k-4)\cdots(2)} = \frac{a_1\,(-1)^k}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2k)}$$

$$= \frac{2\cdot(-1)^k}{2^k\cdot(k!)} \quad \text{så vi får}$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k (k!)}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\cdot 2}{2^k\, k!} x^{2k+1}$$

$$= 1 + 2x - x^2 - x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{20}x^6 - \frac{1}{24}x^7 + \cdots$$

17.7.5

Vi skal finne de første 3 leddene som er ikke er null i en potensrekke~~løs~~-løsning med potenser i x for initialverdiproblemet

$$\begin{cases} y'' + \sin x\, y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Vi skal ha potenser i x (som passer med at $x=0$ i initialverdien), så vi ser etter en løsning $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Initialverdiene gir $a_0 = 1$
$a_1 = 0$

Derivering får vi (se vanlige opplegg)

$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$ så fra ligningen får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sin x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Dette hjelper lite, så lenge jeg har $\sin x$ her, men jeg kan bruke ∞ Taylorrekka til $\sin x$ om $x=0$: $\sin x = \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$

Dermed har jeg

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \qquad (*)$$

der $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$

og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sin x$, dvs.

$$b_0 = 0$$
$$b_1 = 1$$
$$b_2 = 0$$
$$b_3 = -\frac{1}{3!}$$
$$b_4 = 0$$
$$b_5 = \frac{1}{5!}$$
$$b_6 = 0$$
$$b_7 = -\frac{1}{7!}$$
$$\vdots$$

$(*)$ Gir oss $(n+2)(n+1)a_{n+2} + c_n = 0$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$
La oss starte med $n = 0$, finne c_0, ~~og~~ ~~fortsett med n~~ og se hva dette gir, deretter fortsette med $n = 1$, osv. til vi har funnet nok ledd.

$\underline{n=0}$ $\quad c_0 = a_0 b_0$

$$2 \cdot 1 \cdot a_2 + c_0 = 0$$

$$2a_2 + a_0 b_0 = 0 \qquad a_0 = 1, \quad b_0 = 0$$

så $\underline{a_2 = 0}$

$\underline{n=1}$ $\quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$$3 \cdot 2 \cdot a_3 + c_1 = 0$$

$$6a_3 + a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \qquad a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 1$$

$$6a_3 + 1 = 0$$

$$\underline{a_3 = -\frac{1}{6}}$$

$\underline{n=2}$ $\quad c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$

$$4 \cdot 3 \cdot a_4 + c_2 = 0$$

$$12a_4 + \underbrace{a_0 \overset{0}{b_2}}_{0} + \underbrace{a_1 b_1}_{0} + \underbrace{a_2 b_0}_{0} = 0$$

$$\underline{a_4 = 0}$$

$\underline{n = 3}$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$$

$$= 1 \cdot \left(-\frac{1}{3!}\right) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 0$$

$$= -\frac{1}{6}$$

$$5 \cdot 4 \cdot a_5 + c_3 = 0$$

$$a_5 = -\frac{\left(-\frac{1}{3!}\right)}{4 \cdot 5} = \frac{1}{5!} = \underline{\frac{1}{120}}$$

Nå har vi tre ledd som ikke er null, så vi har nok til å svare.

$$y(x) = \underline{\underline{1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\cdots}}$$