# Frivillig øving i tiltaksukene

MA1102 Grunnkurs i analyse II — 2008 vår

Nedenfor er en god del oppgaver med ganske varierende vanskelighetsgrad. Det skulle være nok til de mest ivrige av dere. Hvis du ikke gjør alt bør du prøve å få til litt spredning i hva du holder på med. Det er bedre at du gjør ordentlig enn at du gjør masse halvveis. Pass på at du gir fullstendige argumenter for hver oppgave, og at du hvertfall en gang i blant skriver ut hele argumentet. Gi tilbakemelding hvis noe er umulig. Det kan ha sneket seg inn en trykfeil...

Versjon 3: rettet trykkfeil i GK-h92-4 og GK-v93-2
(Versjon 2: rettet trykkfeil i den andre oppgaven fra Matte 1 1993.)

## 1 Oppgaver fra boka

**4.8:** 17, 33

**8.Review Exercises:** Så mye du orker

**9.1:** 3, 5, 17, 24

**9.2:** 3, 7, 15, 19, 20

**9.3:** 1, 5, 9, 17, 23

**11.6:** 6

## 2 Gamle eksamensoppgaver

### 2.1 Noen fra sivilingeniøremnet Matematikk 1

**Matte 1 1993:** For hvilke reelle tall $x$ gjelder ulikheten $1 < |\frac{1}{2x+1}| < 2$?

**Matte 1 1993:** Vis ved induksjon at $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

**Matte 1 1995:** Angi en funksjon $f(x)$ slik at $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(2+\frac{i}{n})\ln(2+\frac{i}{n})}$ er en Riemannsum for $f$ på intervallet $[0,1]$. Finn deretter grenseverdien $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(2+\frac{i}{n})\ln(2+\frac{i}{n})}$. (Hvorfor skrev jeg ikke bare $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(2+\frac{i}{n})\ln(2+\frac{i}{n})}$?

**Matte 1 1993:** Vis at kurven $x = \sqrt{3}\cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ er en ellipse med buelengde $L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 - \cos u} du$.

**Matte 1 1993:** Bestem konvergensintervallet for rekken $\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^n$. (M.a.o.: for hvilke tall $x$ konvergerer rekken?)

**Matte 1 høst 1996 oppgave 1:** En kurve $K$ i $xy$-planet har parameterfremstilling $x = t^3,\ y = 4 - t^2,\quad 0 \le t \le 2$. Beregn arealet av området som begrenses av $K$ og koordinataksene. Finn også buelengden til kurven $K$, svaret skal gis på eksakt form.

## 2.2 Noen fra det gamle emnet Grunnkurs i matematikk

**GK analyse 2003 oppgave 6:**

1. Bevis at dersom rekken $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ konvergerer, så må vi ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Er betingelsen også tilstrekkelig for at rekken skal konvergere? Begrunn svaret.
2. Bevis at integralet $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ divergerer
3. Avgjør om rekken $\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} + \cdots$ konvergerer eller divergerer. Begrunn svaret ut fra punkt b) v.h.a. en figur.
4. For hvilke tall $x$ konvergerer rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n+1}}$.

**GK analyse vår 1990 oppgave 2:**

1. Klassifiser kjeglesnittet gitt ved ligningen $y^2 - 3x^2 - 6y = 0$. Bestem sentrum, brennpunkt og eventuelle asymptoter. Skisser kjeglesnittet.
2. Benytt implisitt derivasjon for å bestemme stigningstallet for tangenten til kjeglesnittet over i punktet $(x_1, y_1)$. Skriv opp ligningen for tangenten gjennom $(3, 9)$.
3. Skriv opp ligninen for en rett linje gjennom $(0, 3)$ med stigningstall $k$. Bestem deretter de verdiene av $k$ som er slik at denne rette linjen skjærer kjeglesnittet over.
4. Vis at om den at om den rette linjen i c) skjærer kjeglesnittet over, så finnes det ingen tangent til kjeglesnittet som er marallell med denne rette linjen.

**GK analyse høst 1992 oppgave 4:** Konkoiden til Nikodemes har i polarkoordinater ligningen $r = 2 - \frac{1}{\cos\theta},\qquad -\pi < \theta\pi,\ \theta \ne \pm\frac{\pi}{2}$.

1. Finn, uttrykt ved $\theta$, de kartesiske koordinatene $x$ og $y$ til et punkt $P$ på konkoiden som har polarkoordinater $r$ og $\theta$. En rett linje gjennom origo som danner vinkelen $\theta$ med positiv $x$-akse skjærer linjen $x = -1$ i et punkt $Q$. Finn de kartesiske koordinatene til $Q$.
2. Vis at avstanden fra $P$ til $Q$ er konstant (uavhengig av $\theta$). Benytt dette til å skissere den delen $C$ av konkoiden som svarer til verdiene av $\theta$ i intervallet $[-\pi/3, \pi/3]$. (Hint: $C$ danner en enkel lukket kurve. Bruk stor skala og et eget ark ved skisseringen.)

**GK analyse vår 02 oppgave 4:**

1. Bestem v.h.a. l'Hôpitals regel $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2x-1}{x^2}$.
2. Skriv opp Taylorpolynomet til $f(t) = e^t$ av grad 2 omkring $t = 0$, og benytt dette til å finne grenseverdien over på en alternativ måte.

**GK analyse vår 1992 oppgave 6:** Anta at $\{a_n\}$ er en følge av reelle tall som oppfyller betingelsene

1. $a_n \geq 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$
2. $a_{n+1} \leq a_n$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Da vil rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergere. (Bevis for dette kreves ikke.) Vis at betingelse (i) er en konsekvens av betingelsene (ii) og (iii), men at hverken (ii) eller (iii) kan sløyfes for å kunne slutte konvergens av rekken.

**GK analyse vår 1993 oppgave 5:**

1. Gitt funksjonen $f(x) = 7 + 3x - 3x^2 + x^3$. Finn Taylorpolynomet av grad 3 omkring $x = 1$. Hva kan sies om restleddet i dette tilfellet?
2. Bruk resultatet fra (a) til å finne en reell løsning av ligningen $f(x) = 0$.

**GK analyse vår 1994 oppgave 8:**

1. Finn tredjegrads Taylorpolynom ved $x = 0$ for funsksjonen $f(x) = e^x + x\cos x$.
2. Bruk Taylorpolynomet fra a) til å estimere $f(1)$. Skriv opp et uttrykk for restleddet og angi en feilskranke.

**GK analyse høst 1993 oppgave 7:**

1. Finn Taylorpolynomet $P_2(x)$ av grad 2 for $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ omkring $x = 0$, og bestem Lagranges restledd. Angi feilskranker for tilnærmingsformelen $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx P_2(x)$ når $x \geq 0$.
2. Bruk resultatet fra a) til å finne en tilnærmet verdi for $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$. Angi feilskranke.

**GK analyse vår 1990 oppgave 4:**

1. Den naturlige logaritmen $\ln x$ kan som kjent defineres for hver $x > 0$ ved $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Bestem ut fra denne definisjonen $y'$ og $y''$ når $y = \ln x,\ x > 0$. Angi deretter nullpunkt, fortegn, vekstforhold og konkavitet for denne funksjonen.
2. Vis at vi for alle positive tall $x$ og $y$ har $\int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^y \frac{dt}{t}$. Vis ved hjelp av dette at for hvert naturlig tall $n$ gjelder: $\ln 2^n = n\ln 2$, og benytt dette til å vise at $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$.
3. Vis deretter at $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$ for hver $x > 0$, og benytt dette sammen med resultatet i b) til å vise at $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Skisser grafen til $y = \ln x$ på grunnlag av det ovenstående.
4. Vis at vi utfra definisjonen av $\ln x$ får at når $x > 1$, så gjelder $0 < \ln x < 2(\sqrt{x} - 1)$. Benytt dette til å vise at $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ og at $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.

**GK analyse vår 1993 oppgave 2:** La $K$ være kurven, gitt i polarkoordinater ved $r = \cos\theta + \sin\theta,\ -\pi/4 \leq \theta < 3\pi/4$.

1. Vis at $K$ er en sirkel, og tegn figur.
2. Finn arealet av den delen av planet som er begrenset av linjene $\theta = 0$ og $\theta = \pi/2$, samt den delen av $K$ som er gitt ved at $0 \leq \theta \leq \pi/2$.