Løsningsforslag Øving 6 - MA1102

Andreas Oppebøen

29. februar 2008

1 4.8.7

Vi skal finne taylorpolynomet av grad n til funksjonen $f(x) = 1/(2+x)$ om $x = 1$. Ved gjentatt derivasjon med kjerneregel finner vi den i-te deriverte av f som

$$f^{(i)}(x) = \frac{(-1)^i i!}{(2+x)^{i+1}},$$

Taylorpolynomet $P_n(x)$ er da gitt ved

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(1)}{i!}(x-1)^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{3^{i+1}}(x-1)^i.$$

Vi kan også skrive ut summen slik:

$$P_n(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x-1) + \cdots + (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}}(x-1)^n.$$

2 4.8.13

Taylorpolynomet $P_2(x)$ av grad 2 til e^x om $x = 0$ er som kjent

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Vi har dermed tilnærmingen

$$e^{-0.5} \approx P_2(-0.5) = 0.625.$$

Ved å bruke Lagranges restleddformel vet vi at feilen $E(-0.5)$ til denne tilnærmingen tilfredsstiller

$$E(-0.5) = \frac{s^3}{6}$$

for en $s \in [-0.5, 0]$. $\frac{s^3}{6}$ oppnår sin minste verdi for $s = -0.5$, og sin største verdi for $s = 0$. Det gir

$$E(-0.5) \in [\frac{(-0.5)^3}{6}, 0] \approx [-0.021, 0],$$

og dermed har vi

$$e^{-0.5} \in [P_2(-0.5) - 0.125, P_2(-0.5)] \approx [0.604, 0.625].$$

3 4.8.23

Hintet forteller oss at det kan være lurt å bruke identiteten $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, dvs. bruke Taylorutviklingen til $\cos x$. Taylorpolynomet $P_4(x)$ for $\cos(x)$ om $x = 0$ er som kjent

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$

Men for å sikre oss om at vi ikke gjør noe feil, bør vi her ta med oss restleddet

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6).$$

Vi har da

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{2} \\
&= \frac{1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^4}{24} - O((2x)^6)}{2} \\
&= x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{1}{2}O(64x^6) \\
&= x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^6).
\end{aligned}$$

Vi vet at Taylorekspansjonen til $\sin^2(x)$ har formen

$$\sin^2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + O(x^6),$$

og ved å sette disse uttrykkene lik hverandre får vi, ikke uventet, at Taylorpolynomet $P_4(x)$ til $\sin^2(x)$ om $x = 0$ blir

$$P_4(x) = x^2 - \frac{x^4}{3}.$$

Det kan virke pedantisk og unødvendig å drasse med feilleddet hele tiden, men vi må på en eller annen måte forsikre oss om at polynomet vi finner for $\sin^2(x)$ faktisk er Taylorpolynomet, og ikke et annet polynom som tilnærmer funksjonen.

4 9.1.1

Vi skal drøfte følgen $\{\frac{2n^2}{n^2+1}\}_{n=1}^{\infty}$.
Følgen er **positiv** siden $\frac{2n^2}{n^2+1} \geq 0$.
Følgen er **oppad og nedad begrenset.** Vi ser dette lett fordi både teller og nevner er $O(n^2)$, så følgen er $O(1)$. En annen måte å se at følgen er begrenset er å finne en øvre og nedre grense. Vi har allerede vist at følgen er nedad begrenset av 0, og ulikheten

$$\frac{2n^2}{n^2+1} \leq \frac{2n^2}{n^2} = 2$$

viser at den også er oppad begrenset (av 2).
Følgen er **stigende** (ultimately). Dette ser man lett fordi konstanten foran n^2-leddet i telleren er større enn konstanten foran n^2-leddet i nevneren, så telleren

vokser raskere enn nevneren. En annen måte å innse dette på er å betrakte uttrykket som en funksjon på $\mathbb{R}$, og så se at den deriverte alltid er positiv

$$\left(\frac{2x^2}{x^2+1}\right)' = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dette betyr at $\frac{2x^2}{x^2+1} \geq \frac{2y^2}{y^2+1}$ for $x \geq y$; spesielt da for etterfølgende ledd i følgen. Siden følgen er voksende og begrenset, følger det at den er **konvergent**. Grensen er

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2/n^2}{(n^2+1)/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+1/n^2} = 2.$$

Merk at den siste utregningen også viser at følgen er konvergent.

5 9.1.11

Vi skal drøfte følgen $\{n\cos(\frac{n\pi}{2})\}_{n=1}^{\infty}$.
Følgen er **verken positiv eller negativ**, fordi uansett hvor langt ut i følgen vi går, vil vi alltid kunne finne både positive og negative ledd. Alle ledd a_n der $n = 4k$ for $k \in \mathbb{N}$ er positive, mens ledd der $n = 4k + 2$ er negative.
Følgen er heller **ikke alternerende**, fordi den ikke er positiv og negativ annenhver gang. I en alternerende følge kan leddene skrives på formen $(-1)^n a_n$ med $a_n \geq 0$, men det er opplagt ikke mulig å skrive følgen vår på denne måten.
Følgen er **oppad ubegrenset** siden det for enhver $N \in \mathbb{N}$ finnes en n slik at $a_n \geq N$. Velger vi f.eks. $n = 4N$, får vi $a_n = 4N\cos(2\pi N) = 4N > N$. Tilsvarende kan det vises at følgen er **nedad ubegrenset**.
En ubegrenset følge er selvsagt heller **ikke konvergent**.

6 9.2.26

Vi skal vise at dersom $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$. Dette kan vi gjøre enkelt på én linje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} 0 = \lim_{N\to\infty} 0 = 0,$$

men det er viktig at man forstår hvorfor hvert steg er tillatt. Den første likheten følger fra definisjonen av grensen av en (uendelig) rekke. I den andre likheten er $a_n = 0$ brukt. I den tredje bruker vi at en **endelig** sum av 0-er er 0, og i det siste uttrykket har vi en grense av ledd som ikke avhenger av N.