

9.2.9 Ønsker å finne ut om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2^n}{2^{n+2}}$ er konvergent eller divergent. Observer først at;

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2^n}{2^{n+2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^{n+2}} + \frac{2^n}{2^{n+2}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^2} \right) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^2}\end{aligned}$$

Den siste ulikheten følger av at $\frac{3}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^2} > \frac{1}{2^2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Denne summen er divergent;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m 1 = \frac{1}{2^2} \lim_{m \rightarrow \infty} m = \infty.$$

8.6.4 Ønsker å finne arealet av et blad på kurven $r = \sin 3\theta$. Merk at $r = 0 \Leftrightarrow \sin 3\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Et blad kan parameteriseres ved $r = \sin 3\theta, \theta = [0, \pi/3]$. Formel på side 467 i lærebok gir;

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (\sin 3\theta)^2 d\theta$$

Ved å bruke substitusjonen $u = 3\theta$ og den trigonometriske identiteten $2\sin^2 u = 1 - \cos 2u$, får man;

$$A = \frac{1}{6} \int_0^{\pi} (\sin u)^2 du = \frac{1}{6 \cdot 2} \int_0^{\pi} 1 - \cos 2u du = \frac{1}{6 \cdot 2} \left[u - \frac{1}{2} \sin 2u \right]_{u=0}^{u=\pi} = \frac{\pi}{6 \cdot 2}.$$

8.6.15 Av oppgave 8.5.30 følger at lemniscaten har 2 blad. På grunn av symmetri er lengden av kurven lik den dobbelte av lengden av ett blad. Fra oppgave 8.5.30 følger at et blad kan parameteriseres ved $[\cos 2\theta, \theta]$ for $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$. Ved å bruke formel på side 468 med $r^2 = \cos 2\theta$ og $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(-\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2$ får man;

$$\begin{aligned}s &= 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\left(-\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2 + \cos 2\theta} d\theta = 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} + \cos 2\theta} d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\frac{\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta}{\cos 2\theta}} d\theta\end{aligned}$$

Ved å bruke identiteten $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ får man;

$$s = 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\frac{1}{\cos 2\theta}} d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{1}{\cos 2\theta}} d\theta + 2 \int_{-\pi/4}^0 \sqrt{\frac{1}{\cos 2\theta}} d\theta$$

Siden $\cos u$ er en "even" funksjon er de to siste integralene identiske. Ved å bruke identiteten $\cos^{-1} u = \sec u$ følger;

$$s = 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec 2\theta} d\theta.$$

8.4.4 Skal finne lengden av kurven gitt ved $x(t) = \ln(1+t^2)$, $y(t) = 2 \arctan t$. Ved å derivere $x(t)$ og $y(t)$ får man;

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{2}{1+t^2} \end{aligned}$$

Formel på side 454 i lærebok gir;

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+t^2}\right)^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \sqrt{4t^2+4} dt = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2} \sqrt{t^2+1} dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = 2 \left[\arctan t \right]_{t=0}^{t=1} = 2\pi/4 = \pi/2. \end{aligned}$$

En utførlig forklaring av identiteten $(\arctan x)' = (1+x^2)^{-1}$ finnes på side 192 i lærebok.

8.4.7 Skal finne lengden av kurven gitt ved $x(t) = t + \sin t$, $y(t) = \cos t$.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 + \cos t \\ \frac{dy}{dt} &= -\sin t \end{aligned}$$

Formel på side 454 i lærebok gir;

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\pi \sqrt{(1+\cos t)^2 + (-\sin t)^2} dt = \int_0^\pi \sqrt{1+2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{1+2\cos t + 1} dt = \sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{1+\cos t} dt \end{aligned}$$

Ved å bruke identiteten $2\cos^2 u = 1 + \cos 2u$ og substitusjonen $x = t/2$ får man;

$$s = \sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{2\cos^2 t/2} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 x} dx = 4 \int_0^{\pi/2} |\cos x| dx$$

$\cos x \geq 0$ for $x \in [0, \pi/2]$ så;

$$s = 4 \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 4 \left[\sin x \right]_{x=0}^{x=\pi/2} = 4.$$

8.5.30 Observer først at periodisitet gir $[f(\theta), \theta] = [f(\theta + 2\pi), \theta + 2\pi]$ hvor $f(\theta) = \cos n\theta$. Det er derfor tilstrekkelig å finne antall blad som blir skapt av $[f(\theta), \theta]$ for $\theta \in [0, 2\pi)$. For å finne mulige antall blad, kan man begynne med å undersøke antall ganger $f(\theta) = 0$ for $\theta \in [0, 2\pi)$. Vi har;

$$f(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos n\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{n}(k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z},$$

og ettersom $0 \leq \theta < 2\pi$ må $0 \leq k < 2n - 1/2$. Siden $k \in \mathbb{Z}$ er $f(\theta) = 0$ for $k = \{0, 1, \dots, 2n - 1\}$. Man kan dele opp $[0, 2\pi) = [2\pi - \frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}) \cup [\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}) \cup \dots \cup [\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \frac{(2k+3)\pi}{2n}) \cup \dots \cup [2\pi - \frac{3\pi}{2n}, 2\pi - \frac{\pi}{2n}) = I_0 \cup I_1 \cup \dots \cup I_k \cup \dots \cup I_{2n-1}$, slik at hvert av intervallene I_j danner ett blad. Kurven kan derfor generere høyst $2n$ blad. Dersom kurven følger et eller flere blad mer enn en gang vil antall blad bli færre. Siden $\theta \in [0, 2\pi)$ er dette være mulig bare hvis det finnes et intervall I_k slik at $[f(\theta), \theta] = [-f(\theta + \pi), \theta + \pi]$ for $\theta \in I_k$.

Anta at $n = 2m + 1$, dvs. n er et oddetall. Siden $\cos(u + 2\pi) = \cos u$ og $\cos(u + \pi) = -\cos u$ følger at $f(\theta + \pi) = \cos((2m + 1)(\theta + \pi)) = \cos((2m + 1)\theta + (2m + 1)\pi) = -\cos(2m + 1)\theta = -f(\theta)$. Så $[f(\theta), \theta] = [-f(\theta + \pi), \theta + \pi]$. Mao. er $[\cos(2m + 1)\theta, \theta]$ to identiske kurver for $\theta \in [0, \pi]$ og $\theta \in [\pi, 2\pi]$, og følgelig har kurven bare n blad.

Anta dernest at $n = 2m$, mao at n er et partall. Som ovenfor; $f(\theta + \pi) = \cos(2m(\theta + \pi)) = \cos(2m\theta + 2m\pi) = \cos 2m\theta = f(\theta)$, så $[f(\theta), \theta] \neq [f(\theta + \pi), \theta + \pi]$ for $\theta \in [0, \pi]$. Kurven får derfor $2n$ blad.

Betrakt til slutt kurven $f(\theta)^2 = r^2 = \cos n\theta$. Observer at for intervallene $I_1, I_3, \dots, I_{2n-1}$ definert ovenfor, er $\cos n\theta < 0$. $r^2 = \cos n\theta$ har derfor ingen reel løsning i dette tilfellet. Kurven vil med andre ord generere blad bare for de n intervallene $I_0, I_2, \dots, I_{2n-2}$ hvor $\cos n\theta > 0$. Man kan fortsatt risikere at noen av bladene vil overlappe hverandre. Siden $f(\theta) > 0$ på intervallene $I_0, I_2, \dots, I_{2n-2}$ følger derimot at dette ikke er mulig, så kurven $r^2 = \cos n\theta$ har n forskjellige blad.

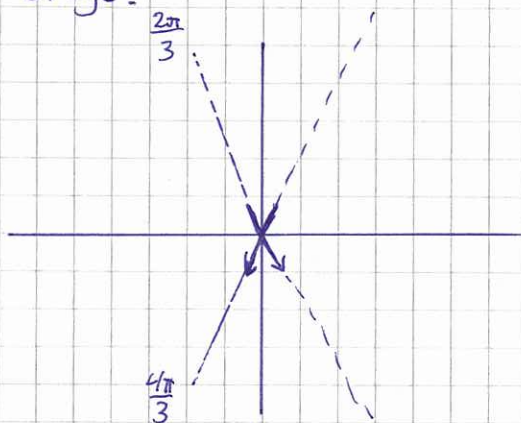
8.5.15

Vi har gitt kurven $r = 1 + 2 \cos \theta$.

Det kan være nyttig å finne ut når/om kurven går gjennom origo.

$$r = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ eller } \theta = \frac{4\pi}{3}$$

(Siden kurven er 2π -periodisk, tar jeg bare med $0 \leq \theta < 2\pi$). Vi kan nå skissere kurven i en omegn av origo.



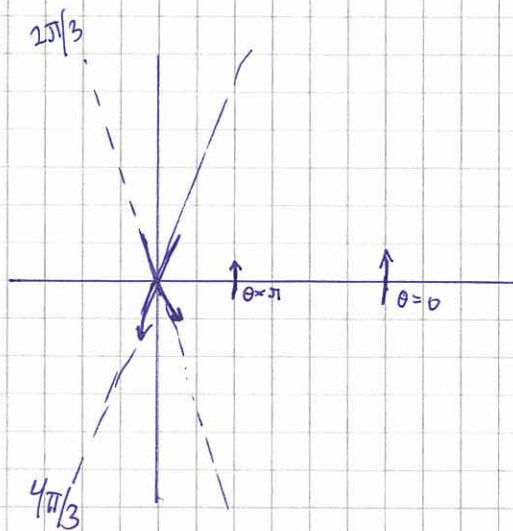
En annen nyttig informasjon er når $\frac{dr}{d\theta} = 0$.

$$\frac{dr}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow -2\sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ eller } \theta = \pi.$$

For $\theta = 0$ er $r = 1 + 2 \cos \theta = 3$

For $\theta = \pi$ er $r = 1 + 2 \cos \pi = -1$.

Merk at $[-1, \pi] = [1, 0]$ i polar-koordinater.



For $\theta = \frac{\pi}{2}$ er $r = 1 + 2\cos\frac{\pi}{2} = 1$.

For $\theta = \frac{3\pi}{2}$ er $r = 1 + 2\cos\frac{3\pi}{2} = 1$.

Vi kan nå lage en (grov) skisse av ~~kurven~~ kurven.

