Oppgave 1 La $\mathcal{E}$ være ellipsen med brennpunkter $\mathcal{B}_1 = (2, 0)$ og $\mathcal{B}_2 = (-2, 0)$, der summen av avstandene fra et punkt $\mathcal{P}$ på ellipsen til brennpunktene $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er konstant og lik 5.

a) Bestem ligningen til $\mathcal{E}$.

b) Finn reelle tall a, b, c og d slik at den parametriske kurven

$$\vec{r}(t) = a\cos(bt) + c\sin(dt)$$

går over hele $\mathcal{E}$ mot klokka på intervallet $[0, \pi]$.

Oppgave 2 La $f_n(x) = x^{2n} - x^n$ være definert på et intervall I, som oppgis deloppgave a)-d) under. I hvert tilfelle, avgjør hvilket av følgene utsagn som stemmer for funksjonsfølgen $\{f_n\}$:

- Den konvergerer uniformt.
- Den konvergerer punktvis, men ikke uniformt.
- Den konvergerer ikke.

a) $I = [-1, 1]$

b) $I = [0, 1]$

c) $I = [-\frac{1}{2}, 0]$

d) $I = [\frac{1}{2}, 1]$

Oppgave 3 I hver deloppgave under, avgjør om summen konvergerer eller divergerer.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n}$

b) $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$

c) $\sum_{n=1000}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{1000n+1}$

Oppgave 4

a) Finn maclaurinrekken til funksjonen $f(x) = \arctan(2x^2)$ og bestem konvergensområdet til denne.

b) Bestem konvergensområdet til rekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}$ og en funksjon $f(x)$ som har denne som maclaurinrekke.

Oppgave 5 Bestem alle komplekse tall z som tilfredstiller ligningen

$$z^2 = (1 + i\sqrt{3})^3.$$

Oppgave 6

a) Løs den homogene differensialligningen $y'' + 2y' + 2y = 0$.

b) Løs den inhomogene differensialligningen

$$y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$$

med initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

Oppgave 7 Finn potensrekkeløsningen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ av differensialligningen

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

med initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y'(0) = 2$.

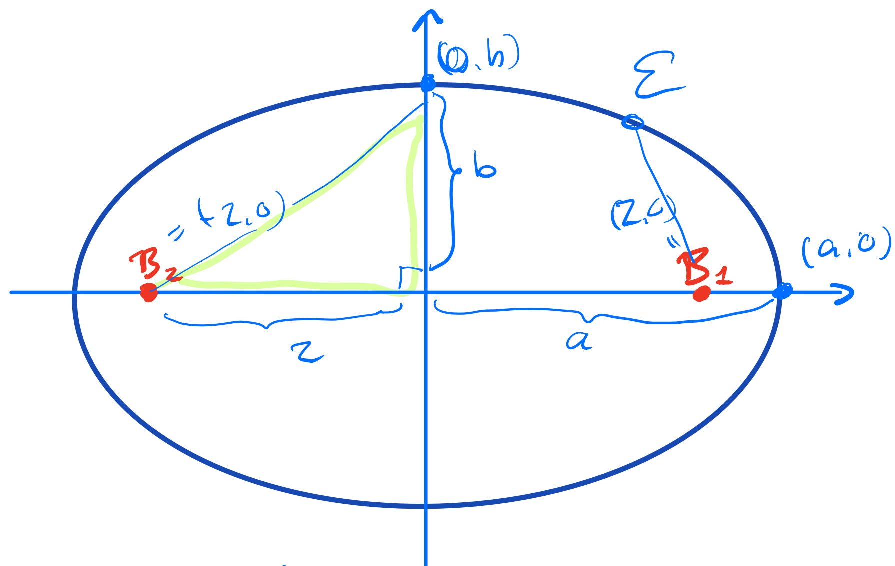
Oppgave 8 La $y(x)$ være en løsning av differensialligningen

$$y' = x^2 y^2$$

med initialbetingelsen $y(0) = 1$. Bruk Eulers forbedrede metode med steglengde $h = 0.1$ til å approksimere veriden av $y(x)$ i punktene $x_1 = 0.1$ og $x_2 = 0.2$.

Oppgave 1 La $\mathcal{E}$ være ellipsen med brennpunkter $\mathcal{B}_1 = (2, 0)$ og $\mathcal{B}_2 = (-2, 0)$, der summen av avstandene fra et punkt $\mathcal{P}$ på ellipsen til brennpunktene $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er konstant og lik 5.

a) Bestem ligningen til $\mathcal{E}$. (på standardform).



Vi uttrykker ligning for $\mathcal{E}$ på standardform,

altså på formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der a er den store halvaksen og b

den lille.

Siden $A=(a,0)$ er på ellipsen har vi at

$$|AB_1| + |AB_2| = 5$$

$$a-2 + a+2 = 5$$

$$2a = 5$$

$$\Rightarrow \underline{a = 5/2}.$$

Siden $B=(0,b)$ er på ellipsen vil

$$|BB_1| + |BB_2| = 5$$

$$\sqrt{2^2+b^2} + \sqrt{2^2+b^2} = 5$$

$$2\sqrt{2^2+b^2} = 5$$

$$4(4+b^2) = 25$$

$$b^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{b = \frac{3}{2}}}$$

Ligningen for $\mathcal{E}$ er

$$\frac{x^2}{(5/2)^2} + \frac{y^2}{(3/2)^2} = 1$$

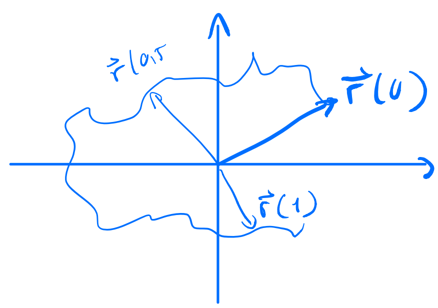
Oppgave 1 La $\mathcal{E}$ være ellipsen med brennpunkter $\mathcal{B}_1 = (2, 0)$ og $\mathcal{B}_2 = (-2, 0)$, der summen av avstandene fra et punkt $\mathcal{P}$ på ellipsen til brennpunktene $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er konstant og lik 5.

a) Bestem ligningen til $\mathcal{E}$. $\dfrac{x^2}{(5/2)^2} + \dfrac{y^2}{(3/2)^2} = 1$

b) Finn reelle tall a, b, c og d slik at den parametriske kurven

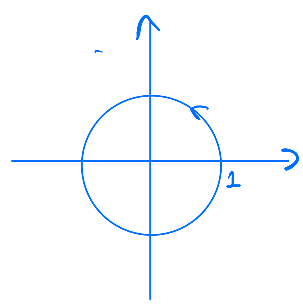
$$\vec{r}(t) = \left(a\cos(bt),\ c\sin(dt)\right)$$

går over hele $\mathcal{E}$ mot klokka på intervallet $[0, \pi]$.



En sirkel kan parametriseres slik

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$



En annen mulighet er

$$\vec{r}(t) = (\cos(2t), \sin(2t)), \quad t \in [0, \pi]$$

I oppgave 1a) fant vi at $a = \frac{5}{2}$ og $b = 3/2$ henholdsvis er store og lille halvakse av ellipsen.

Den parametriserte kurven

$$\boxed{\vec{r}(t) = \left(\frac{5}{2}\cos(2t), \frac{3}{2}\sin(2t)\right), \quad t \in [0, \pi]}$$

blir en ellipse på standardform med samme halvakser som $\mathcal{E}$. Derfor vil denne parametrisere $\mathcal{E}$.

Vi sjekker at $\frac{x^2}{(5/2)^2} + \frac{y^2}{(3/2)^2} = 1$ stemmer for alle punkter $\vec{r}(t) = \left(\frac{5}{2}\cos(2t), \frac{3}{2}\sin(2t)\right)$, $t \in [0, \pi]$.

$$\frac{\left(\cancel{\frac{5}{2}}\cos(2t)\right)^2}{\cancel{\left(\frac{5}{2}\right)^2}} + \frac{\left(\cancel{\frac{3}{2}}\sin(2t)\right)^2}{\cancel{\left(\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$= \cos(2t)^2 + \sin(2t)^2 = 1.$$

$$\boxed{a = \frac{5}{2},\ c = \frac{3}{2},\ b = d = 2.}$$

Oppgave 2 La $f_n(x) = x^{2n} - x^n$ være definert på et intervall I, som oppgis deloppgave a)-d) under. I hvert tilfelle, avgjør hvilket av følgene utsagn som stemmer for funksjonsfølgen $\{f_n\}$:

- Den konvergerer uniformt.
- Den konvergerer punktvis, men ikke uniformt.
- Den konvergerer ikke.

a) $I = [-1, 1]$

a) $f_n(x) = x^{2n} - x^n$ på $I = [-1, 1]$.

Se på følgen $\{f_n(-1)\}_{n=0}^{\infty}$.

$$f_n(-1) = (-1)^{2n} - (-1)^n = 1 - (-1)^n$$

Dermed er $f_n(-1) = 0$ om n er et partall og $f_n(-1) = 2$ om n er et oddetall.

Fordi følgen $\{f_n(-1)\}$ ikke konvergerer kan ikke $\{f_n\}$ konvergere punktvis på $[-1, 1]$.

Oppgave 2 La $f_n(x) = x^{2n} - x^n$ være definert på et intervall I, som oppgis deloppgave a)-d) under. I hvert tilfelle, avgjør hvilket av følgene utsagn som stemmer for funksjonsfølgen $\{f_n\}$:

- Den konvergerer uniformt.
- Den konvergerer punktvis, men ikke uniformt.
- Den konvergerer ikke.

b) $I = [0, 1]$

Vi undersøker om $\{f_n\}$ konvergerer punktvis.
Da må grenseverdien
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$
eksistere for alle $x \in [0,1]$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^{2n} - x^n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} 0-0 = 0 & x=0 \\ \lim_{n\to\infty} 1-1 = 0 & x=1 \\ \lim_{n\to\infty} x^{2n} - x^n = 0 & x \in (0,1) \end{cases}$$

Dette viser at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot $f(x) = 0$ på $[0,1]$.

Sjekke om $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot $f(x)=0$.

Da må $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$

der $d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$.

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} |x^{2n} - x^n|$$

Skal maksimere $f_n(x)$ på $[0,1]$.

$$f_n'(x) = 2n\,x^{2n-1} - n x^{n-1}.$$

Om $f_n'(x) = 0$ da er $2n\,x^{2n-1} = n\,x^{n-1}$

$$\Rightarrow \frac{x^{2n-1}}{x^{n-1}} = \frac{n}{2n} \Rightarrow x^n = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}.$$

Punktet $\left(\sqrt[n]{1/2},\ f_n\left(\sqrt[n]{1/2}\right)\right)$ er et ekstremalpunkt.

$$f_n\left(\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}\right) = \left(\sqrt[n]{1/2}\right)^{2n} - \left(\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}\right)^n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2} = -1/2.$$

Derfor er $d(f_n, f) = -1/2$, og

det konvergerer ikke uniformt.

$\boxed{\text{Konklusjon: Konvergensen er punktvis, men ikke uniform}}$

Oppgave 2 La $f_n(x) = x^{2n} - x^n$ være definert på et intervall I, som oppgis deloppgave a)-d) under. I hvert tilfelle, avgjør hvilket av følgene utsagn som stemmer for funksjonsfølgen $\{f_n\}$:

- Den konvergerer uniformt.
- Den konvergerer punktvis, men ikke uniformt.
- Den konvergerer ikke.

c) $I = [-\frac{1}{2}, 0]$

Sjekker om vi punktvis konvergens, altså at grenseverdien

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

eksisterer for alle $x \in [-1/2, 0]$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x^{2n} - x^n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} x^{2n} - \lim_{n\to\infty} x^n = 0 - 0 = 0$$ for alle $x \in [-1/2, 0]$.

Derfor går $\{f_n\}$ går punktvis mot $f(x) = 0$ på $[-1/2, 0]$.

Denne konvergensen er uniform dersom

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$$

der $d(f_n,f) = \sup_{x\in[-1/2,0]} |f_n(x) - f(x)|$

I vårt tilfelle er $d(f_n, f) = |x^{2n} - x^n|$

Vi skal maksimere $|f_n(x)|$ på $[-1/2, 0]$

Den deriverte er $f_n'(x) = 2n x^{2n-1} - n x^{n-1}$

$$= n x^{n-1}(2x^n - 1)$$

- Faktoren $2x^n - 1$ er negativ for alle $x \in [-1/2, 0]$ og alle n.
- Faktoren nx^{n-1} er $\begin{cases} \text{ikke-positiv om } n \text{ er et partall} \\ \text{ikke-negativ om } n \text{ er odde} \end{cases}$

Derfor er $f_n'(x) = \begin{cases} \text{ikke-negativ om } n \text{ er et partall} \\ \text{ikke-positiv om } n \text{ er et oddetall} \end{cases}$

Med andre ord er f enten er stigande eller avtakende. Dette gir at maksimumsverdien ligger i endepunktene.

Enten er $d(f_n, f) = |f_n(0)|$ eller $d(f_n, f) = |f_n(-1/2)|$

$d(f_n, f) = |0^{2n} - 0|$ eller $d(f_n, f) = |f_n(-1/2)|$

$d(f_n, f) = 0$ eller $d(f_n, f) = \left|\left(\frac{-1}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right|$

Derfor er $d(f_n, f) = \left|\left(\frac{-1}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right| = \left|\frac{1}{4^n} - \frac{(-1)^n}{2^n}\right|$

Om n er et partall er
$d(f_n, f) = \left|\frac{1}{4^n} - \frac{1}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}$

Om n er et oddetall er
$d(f_n, f) = \left|\frac{1}{4^n} + \frac{1}{2^n}\right| = \frac{1}{4^n} + \frac{1}{2^n}$.

I begge tilfellene blir $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

$\boxed{\text{Dette viser at } \{f_n\} \text{ går uniformt mot } f(x) = 0.}$

Oppgave 2 La $f_n(x) = x^{2n} - x^n$ være definert på et intervall I, som oppgis deloppgave a)-d) under. I hvert tilfelle, avgjør hvilket av følgene utsagn som stemmer for funksjonsfølgen $\{f_n\}$:

- Den konvergerer uniformt.
- Den konvergerer punktvis, men ikke uniformt.
- Den konvergerer ikke.

d) $I = [\frac{1}{2}, 1]$

Bruk samme metode som i 2b).

Ekstremalpunktet $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ er nemlig i intervallet $[\frac{1}{2}, 1]$

Funksjonsfølgen konvergerer uniformt på $[\frac{1}{2}, 1]$

Oppgave 3 I hver deloppgave under, avgjør om summen konvergerer eller divergerer.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n}$

Denne rekken er alternerende.
Derfor vil rekken konvergere (la $a_n = \frac{n(n+1)}{2^n}$)

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ii) Det finnes en $N \geq 0$ slik at $a_{n+1} < a_n$ for alle $n \geq N$.

(Med andre ord krever vi at følgen $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ går monotont mot 0).

Sjekker vi om (i) stemmer:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2^n}$$

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\ln(2)\, 2^n} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\ln(2)^2\, 2^n} = 0.$$

(i) er ok

Sjekker om (ii) stemmer.

Se på differansen $a_{n+1} - a_n$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}} - \frac{n(n+1)}{2^n}$$

$$= \frac{n+1}{2^n}\left(\frac{n+2}{2} - n\right)$$

Faktoren $\frac{n+2}{2} - n < 0$ for alle $n \geq 3$.

Derfor er $a_{n+1} - a_n < 0$ for alle $n \geq 3$.

Som betyr at (ii) stemmer og $N = 3$.

Krav (ii) er ok

$$\boxed{\text{Vi har brukt konvergenstesten for alternerende rekker til å vise at rekken konvergerer.}}$$

Oppgave 3 I hver deloppgave under, avgjør om summen konvergerer eller divergerer.

b) $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$

Vi bruker forholdstesten. ha

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+2)\cancel{2^{n+1}} / \cancel{(n+1)!}}{(n+1)\cancel{2^n} / \cancel{n!}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+2)}{(n+1)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+4}{n^2+2n+1}$$

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2n+2} = 0.$$

$\boxed{\text{Ved forholdstesten konvergerer rekken}}$

Oppgave 3 I hver deloppgave under, avgjør om summen konvergerer eller divergerer.

c) $\sum_{n=1000}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Vi prøver oss med forholdstesten. ha

$$h = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^{n+1} / \cancel{(n+1)!}}{n^n \,/\, \cancel{n!}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71$$

$$\boxed{\text{Dette betyr at } h > 1\text{, som gjør at rekken divergerer.}}$$

(Alternativt: Vi ser at $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty \neq 0$.)

Oppgave 3 I hver deloppgave under, avgjør om summen konvergerer eller divergerer.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{1000n+1}$

For at dette skal konvergere må

$$\lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n \frac{n+1}{1000n+1}\right| = 0$$

Vi regner ut denne grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n \frac{n+1}{1000n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1000n+1}$$

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1000}$$

$$= \frac{1}{1000} \neq 0.$$

Konklusjon: Rekken divergerer.

Oppgave 4

a) Finn maclaurinrekken til funksjonen $f(x) = \arctan(2x^2)$ og bestem konvergensområdet til denne.

Vi løser oppgaven for $g(x) = \arctan(x)$ først.

Vi vet at $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Vi benytte oss av den kjente maclaurinrekken

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{for} \quad x \in (-1,1).$$

Som gir oss at

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

som konvergerer når $-x^2 \in (-1,1)$, altså når $x \in (-1,1)$.

Derfor er
$$g(x) = \int_0^x g'(x)\,dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\,dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Konvergensradiusen til $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ er fortsatt 1, fordi dette er konvergensradiusen til den deriverte rekken. Vi må sjekke endepunktene $x = \pm 1$. Om $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

som konvergerer (vi kan bruke konvergenstesten for alterende rekker).

Om $x = -1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{2n+1} \overset{(*)}{=} -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$(*)$: $(-1)^{3n+1} = -(-1)^{3n} = -\left((-1)^3\right)^n = -(-1)^n$.

Derfor har vi en maclaurinrekke

$$g(x) = \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

med konvergensområde $x \in [-1, 1]$.

Vi ~~avslutter~~ med å finne maclaurinrekken til
$f(x) = \arctan(2x^2) = g(2x^2)$

$$f(x) = g(2x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x^2)^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{4n+2}$$

som konvergerer når $2x^2 \in [-1, 1]$
altså når $x^2 \in [-1/2, 1/2]$, altså når $x \in [\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Konklusjon: Maclaurinrekken til f gis ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{4n+2}$$

Konvergensområdet er $[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Oppgave 4

b) Bestem konvergensområdet til rekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}$ og en funksjon $f(x)$ som har denne som maclaurinrekke.

For å bestemme konvergensområdet bruker vi forholdstesten. ha

$$h = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)} / 2^{n+1}(n+1)!}{(-1)^n x^{2n} / 2^n n!} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2(n+1)}$$

$$= 0 \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Forholdstesten sier blant annet at det konvergerer når $h = 0$.

Derfor er $\boxed{\text{konvergensområdet lik hele } \mathbb{R}.}$

Nå skal vi finne $f(x)$ slik at maclaurinrekken er

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}$$

Ved å samle n-potensene ser vi at

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-x^2}{2} \right)^n$$

En kjent maclaurinrekke er

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Derfor er funksjonen f vi er ute etter

$$\boxed{f(x) = e^{-x^2/2}}$$

Oppgave 5 Bestem alle komplekse tall z som tilfredstiller ligningen

$$z^2 = (1 + i\sqrt{3})^3.$$

Vi konverterer $w = 1 + i\sqrt{3}$ til polarform.

- $|w| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

- $\arg(w) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \pi/3$

Derfor $w = 2e^{i\pi/3}$ på polarform

Skal løse $z^2 = w^3$ mhp. z

$$w^3 = (2e^{i\pi/3})^3 = 2^3 e^{i\frac{\pi}{3}3} = 8e^{i\pi} = -8$$

Skal altså løse $z^2 = -8 = 8e^{i\pi}$.

Generelt er andrerøttene til $re^{i\theta}$
$r^{1/2}e^{i\theta/2}$ og $r^{1/2}e^{i(-\theta)/2}$

Derfor er $z \in \{8^{1/2}e^{i\pi/2}, 8^{1/2}e^{i\frac{-\pi}{2}}\}$

$$\boxed{z \in \{8^{1/2}i, -8^{1/2}i\}}$$

Oppgave 6

a) Løs den homogene differensialligningen $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Vi skriver ned den karakteristiske ligningen

$$r^2 + 2r + 2 = 0. \qquad (*)$$

Røttene er

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = -1 \pm i.$$

Et resultat i kurset sier at om $(*)$ har to komplekskonjugerte røtter $\alpha \pm i\beta$ er den generelle løsningen

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right)$$

I vårt tilfelle er $\alpha = -1$ og $\beta = 1$

Derfor blir $\boxed{y(x) = e^{-x}\left(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)\right)}$

Oppgave 6

b) Løs den inhomogene differensialligningen

$$y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$$

med initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

La y_h være den generelle løsningen av

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Fra oppgave a):

$$y_h(x) = e^{-x}(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x))$$

Om y_p er én løsning av $y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$

så gis den generelle løsningen ved

$$y = y_h + y_p.$$

Vi gjetter at y_p er på formen $A\cos(2x) + B\sin(2x)$

$$y_p = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

$$y_p' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$$

$$y_p'' = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$$

Vi løser for A og B

$$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = \sin(2x)$$

$$\begin{aligned}
&-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) \\
&+4B\cos(2x) - 4A\sin(2x) \\
&2A\cos(2x) + 2B\sin(2x) \quad = \sin(2x)
\end{aligned}$$

$$(4B-2A)\cos(2x) + (-4A-2B)\sin(2x) = \sin(2x)$$

Vi løser systemet

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad 4B - 2A = 0 \\
&(\mathrm{II}) \quad -2B - 4A = 1
\end{aligned}$$

$(\mathrm{I}) + 2(\mathrm{II})$: $\quad 4B-2A + 2(-2B-4A) = 0 + 2\cdot 1$

$$-10A = 2$$

$$\Longrightarrow \underline{A = -1/5}.$$

Setter dette inn i (I)

$$4B - 2A = 0 \Longrightarrow \underline{B = \tfrac{1}{2}A} = \tfrac{-1}{10}.$$

Derfor er $y_p = \frac{-1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x)$
en partikulærløsning.

Dette medfører at den generelle løsningen til $y'' + 2y' + 2y = 0$ blir

$$y = y_h + y_p$$
$$= e^{-x}\left(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)\right) - \frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x)$$

$$y = c_1 e^{-x}\cos(x) + c_2 e^{-x}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x)$$

Vi har initialbetingelser $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

Vi behøver et uttrykk for $y'(x)$:

$$y'(x) = -c_1 e^{-x}\cos(x) - c_1 e^{-x}\sin(x) - c_2 e^{-x}\sin(x) + c_2 e^{-x}\cos(x) + {}^{2}/_{5}\sin(2x) - \frac{1}{5}\cos(2x).$$

Derfor er $y'(0) = -c_1 + c_2 - {}^{1}/_{5}$.

Om $y'(0) = 0$ må $c_2 - c_1 = {}^{1}/_{5}$

Bruker $y(0)=1$ for å få enda en betingelse for c_1 og c_2.

$$y(0) = c_1 e^{-0}\cos(0) + c_2 e^{-0}\sin(0) - \frac{1}{5}\cos(2\cdot 0) - \frac{1}{10}\sin(2\cdot 0)$$

$$= c_1 - \frac{1}{5}$$

Om $y(0)=1$ må $c_1 = \frac{6}{5}$

Derfor er $c_2 = \frac{1}{5} + c_1 = \frac{7}{5}$.

Løsningen er

$$\boxed{y = \frac{6}{5} e^{-x}\cos(x) + \frac{7}{5} e^{-x}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x)}$$

Oppgave 7 Finn potensrekkeløsningen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ av differensialligningen

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

med initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y'(0) = 2$.

La $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ være en løsning.

Vi skal bestemme a_n for $n \geq 0$.

Ved derivasjon finner vi:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Vi setter inn dette i:

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y + xy' + y'' = 0$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x\left(\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2a_n + na_n + (n+2)(n+1) a_{n+2}\right) x^n = 0$$

Vi må altså kreve at

$$(2+n)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0$$
for alle $n \geq 0$.

$$\iff \quad a_{n+2} = \frac{-\cancel{(2+n)}a_n}{\cancel{(n+2)}(n+1)} = \frac{-a_n}{n+1}$$

for alle $n \geq 0$.

Vi bruke initialbetingelsene tol å finne a_0 og a_1

$$y(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0$$

Om $y(0) = 1$ må $a_0 = 1$.

$$y'(0) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n 0^{n-1} = a_1$$

Om $y'(0) = 2$ må $a_1 = 2$.

Nå bruker vi relasjonen

$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{n+1}, \quad n \geq 0 \qquad (*)$$

til å finne a_n for $n \geq 2$.

Anta at $n = 2\ell$ er et partall.

Da er

$$a_n = a_{2\ell} \overset{(*)}{=} \frac{-a_{2\ell-2}}{2\ell-1} \overset{(*)}{=} \frac{-\left(\frac{-a_{2\ell-4}}{2\ell-3}\right)}{2\ell-1} = \frac{(-1)^2 a_{2\ell-4}}{(2\ell-1)(2\ell-3)}$$

$$\overset{(*)}{=} \cdots \overset{(*)}{=} \frac{(-1)^\ell a_{2\ell-2\ell}}{(2\ell-1)(2\ell-3)\cdots 5.3.1} = \frac{(-1)^\ell}{(2\ell-1)(2\ell-3)\cdots 5.3.1}.$$

Anta at $n = 2\ell+1$ er et partall

$$a_n = a_{2\ell+1} \overset{(*)}{=} \frac{(-1)^1 a_{2\ell-1}}{2\ell} \overset{(*)}{=} \cdots \overset{(*)}{=} \frac{(-1)^\ell a_{2\ell-(2\ell-1)}}{2\ell(2\ell-2)\cdots 6.4.2}$$

$$= \frac{(-1)^\ell \cancel{2}}{\cancel{2}\ell(2\ell-2)\cdots 6.4.2} = \frac{(-1)^\ell}{\ell\,(2\ell-2)\cdots 6.4.2}$$

$$= \frac{(-1)^\ell}{\ell\, 2^{\ell-1}\,(\ell-1)!}.$$

Løsningen y er som følger

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

der a_n er gitt over

Oppgave 8 La $y(x)$ være en løsning av differensialligningen

$$y' = x^2y^2 = f(x,y)$$

med initialbetingelsen $y(0) = 1$. Bruk Eulers forbedrede metode med steglengde $h = 0.1$ til å approksimere veriden av $y(x)$ i punktene $x_1 = 0.1$ og $x_2 = 0.2$.

$$y_{n+1} = y_n + h\,\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2}$$

der $x_n = x_0 + nh$, $\quad (y_n \approx y(x_n))$

og $u_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$

For oss er $h = 0.1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Finner y_1 først

$$u_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1 \times 0^2 \times 1^2 = 1$$

$$y_1 = y_0 + h\,\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, u_1)}{2}$$

$$= 1 + 0.1\,\frac{0^2 \times 1^2 + 0.1^2 \cdot 1^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1 = 1{,}0005}$$

Finner y_2

$$u_2 = y_1 + h f(x_1, y_1)$$

$$= 1{,}0005 + 0.1 \times 0.1^2 \times 1{,}0005^2$$

$$= 1{,}0015$$

$$y_2 = y_1 + h \frac{f(x_1, y_2) + f(x_2, u_2)}{2}$$

$$= 1.0005 + 0.1 \frac{0.1^2 \times 1.0005^2 + 0.2^2 \times 1.0015^2}{2}$$

$$\boxed{y_2 = 1.0030}$$