Oppgave 1 La $\mathcal{E}$ være ellipsen med brennpunkter $\mathcal{B}_1 = (2, 0)$ og $\mathcal{B}_2 = (-2, 0)$, der summen av avstandene fra et punkt $\mathcal{P}$ på ellipsen til brennpunktene $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er konstant og lik 5.

a) Bestem ligningen til $\mathcal{E}$.

b) Finn reelle tall a, b, c og d slik at den parametriske kurven

$$\vec{r}(t) = a\cos(bt) + c\sin(dt)$$

går over hele $\mathcal{E}$ mot klokka på intervallet $[0, \pi]$.

Oppgave 2 La $f_n(x) = x^{2n} - x^n$ være definert på et intervall I, som oppgis deloppgave a)-d) under. I hvert tilfelle, avgjør hvilket av følgene utsagn som stemmer for funksjonsfølgen $\{f_n\}$:

- Den konvergerer uniformt.
- Den konvergerer punktvis, men ikke uniformt.
- Den konvergerer ikke.

a) $I = [-1, 1]$

b) $I = [0, 1]$

c) $I = [-\frac{1}{2}, 0]$

d) $I = [\frac{1}{2}, 1]$

Oppgave 3 I hver deloppgave under, avgjør om summen konvergerer eller divergerer.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n}$

b) $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$

c) $\sum_{n=1000}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{1000n+1}$

Oppgave 4

a) Finn maclaurinrekken til funksjonen $f(x) = \arctan(2x^2)$ og bestem konvergensområdet til denne.

b) Bestem konvergensområdet til rekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}$ og en funksjon $f(x)$ som har denne som maclaurinrekke.

Oppgave 5 Bestem alle komplekse tall z som tilfredstiller ligningen

$$z^2 = (1 + i\sqrt{3})^3.$$

Oppgave 6

a) Løs den homogene differensialligningen $y'' + 2y' + 2y = 0$.

b) Løs den inhomogene differensialligningen

$$y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$$

med initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

Oppgave 7 Finn potensrekkeløsningen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ av differensialligningen

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

med initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y'(0) = 2$.

Oppgave 8 La $y(x)$ være en løsning av differensialligningen

$$y' = x^2 y^2$$

med initialbetingelsen $y(0) = 1$. Bruk Eulers forbedrede metode med steglengde $h = 0.1$ til å approksimere veriden av $y(x)$ i punktene $x_1 = 0.1$ og $x_2 = 0.2$.