



Først en kommentar. I læreboka møter man kjeglesnitt på standardform, som ellipser

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

og hyperbler $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Det er viktig å merke seg at disse formlene antar at sentrum av kjeglesnittet ligger i origo. I øvingen kommer vi til å møte kjeglesnitt med andre sentrum, som ellipser gitt ved

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (2)$$

Ligning (2) beskriver en ellipse med sentrum i punktet (x_0, y_0) , med stor halvakse a og liten halvakse b . Grunnen er følgende: Punktene (x', y') som tilfredsstiller (2) er på formen $x' = x + x_0$ og $y' = y + y_0$, der (x, y) tilfredsstiller (1) – dette er greit å sjekke. Med andre ord får vi løsningene av $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ ved å ta punkt (x, y) på ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ med sentrum i origo, og legge til x_0 i x-retningen og y_0 i y-retning. Dette gir åpenbart en ellipse med sentrum i (x_0, y_0) .

8.1.2 Vi skal finne ligningen til ellipsen med brennpunkt i $(0, 1)$ og $(4, 1)$ og med eksentrisitet $\epsilon = \frac{1}{2}$. Denne ellipsen har sentrum i punktet $(2, 1)$, siden dette er punktet midt mellom brennpunktene, og stor halvakse langs $y = 1$. En slik ellipse med sentrum i $(2, 1)$ har som nevnt innledningsvis ligning

$$\frac{(x - 2)^2}{a^2} + \frac{(y - 1)^2}{b^2} = 1.$$

I dette eksempelet er $c = 2$, siden c er avstanden fra sentrum i ellipsen til brennpunktene. Videre vet vi at $\epsilon = c/a$, som betyr at

$$\frac{1}{2} = 2/a,$$

ergo $a = 4$. Til slutt er $c^2 = a^2 - b^2$, slik at $b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 2^2 = 12$. Når vi setter inn disse verdiene for a og b finner vi ligningen

$$\frac{(x - 2)^2}{16} + \frac{(y - 1)^2}{12} = 1.$$

8.1.4 Vi skal finne ligningen til parabelen som går gjennom origo med brennpunkt i $(0, -1)$ og akse $y = -1$. Husk at aksene er linja gjennom brennpunktet som står vinkelrett på styrelinja. Siden aksene er horisontal må derfor styrelinja være vertikal, altså på formen $x = a$ for et reelt tall a .

Definisjonen av en parabel er at et punkt (x, y) ligger på parabelen hvis og bare hvis avstanden fra (x, y) til brennpunktet $(0, -1)$ er lik avstanden fra (x, y) til styrelinja $x = a$. Det gir følgende ligning:

$$\underbrace{\sqrt{x^2 + (y + 1)^2}}_{\text{Avstand } (x,y) \text{ til } (0,-1)} = \underbrace{|x - a|}_{\text{Avstand } (x,y) \text{ til linja } x=a}.$$

Hvis vi kvadrerer begge sider finner vi

$$x^2 + (y + 1)^2 = (x - a)^2.$$

Dette kan vi forenkle til ligningen

$$(y + 1)^2 = a^2 - 2ax.$$

For å bestemme hvilke verdier av a som er gyldige, må vi bruke at parabelen skal gå gjennom origo. Med andre ord må $(x, y) = (0, 0)$ tilfredsstille ligningen over:

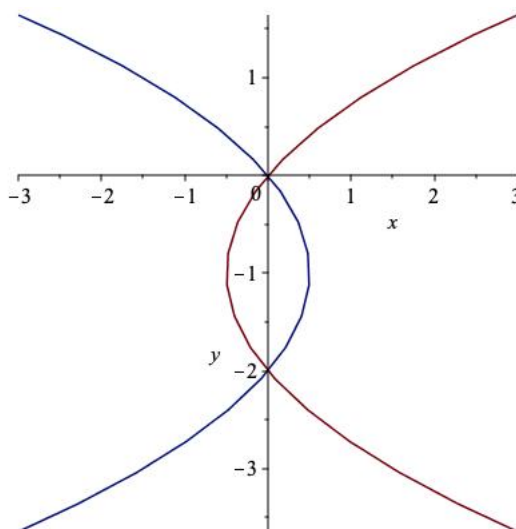
$$1^2 = a^2 - 0.$$

Ergo må $a^2 = 1$, som betyr at $a = \pm 1$. Konklusjonen blir at parabelen må være gitt enten ved

$$(y + 1)^2 = 1 - 2x$$

eller ved

$$(y + 1)^2 = 1 + 2x.$$



Figur 1: De to mulige parablene som løser oppgave 8.1.4. Som vi ser av figuren har de samme brennpunkt, akse og går gjennom origo. De har dog ulike styrelinjer, nemlig $x = -1$ og $x = 1$.

8.1.6 Vi skal finne ligningen til en hyperbel med brennpunkter i $(\pm 5, 1)$ og asymptoter $x = \pm(y - 1)$. Vi skyver den ned med én enhet. Nå har vi en hyperbel på standardform

med brennpunkter i $(\pm 5, 0)$ og asymptoter $x = \pm y$. Denne standardhyperbelen har en ligning på formen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ligningene for asymptotene skal være

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0,$$

som for oss forutsetter at $a = b$. Avstanden fra senteret til brennpunktene skal være

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a.$$

Ettersom denne avstandene skal være fem lengdeenheter, må $a = b = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Standardhyperbelen vi har jobbet med har ligning $\left(\frac{x}{\frac{5\sqrt{2}}{2}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\frac{5\sqrt{2}}{2}}\right)^2 = 1$, og dermed vil den opprinnelige hyperbelen beskrives ved

$$\left(\frac{x}{\frac{5\sqrt{2}}{2}}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{\frac{5\sqrt{2}}{2}}\right)^2 = 1,$$

eller

$$\frac{x^2}{25/2} - \frac{(y-1)^2}{25/2} = 1.$$

8.1.17 Dette er en parabel med brunnpunkt i $(3, 4)$ og styrelinje på formen $x = \ell$. Den generelle ligningen er

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = x - \ell.$$

Dersom origo skal ligge på parabelen må

$$\begin{aligned}\sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2} &= 0 - \ell \\ \pm 5 &= 0 - \ell \\ \ell &= \mp 5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} &= x \mp 5 \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 &= (x \mp 5)^2 \\ x^2 - 6x + 9 + (y-4)^2 &= x^2 \mp 10x + 25 \\ (y-4)^2 &= \mp 10x + 6x + 16.\end{aligned}$$

Den ene løsningen er

$$(y-4)^2 = -4x + 16$$

og den andre er

$$(y-4)^2 = 16x + 16.$$

8.1.18 Oppgaven gir en (litotriptisk) beskrivelse av en ellipse med brennpunkter i $(0, 0)$ og $(3, 0)$. Vi skal finne ligningen til alle mulige slike. Vi skyver brennpunktene $\frac{3}{2}$ enheter

til venstre, slik at sentrum er i origo. Den frøskøvne ellipsen har da en ligning på formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

der a er den store halvaksen, og b den lille.

Avstanden fra sentrum til brennpunktene er $\frac{3}{2}$. Vi har sett i forelesning (vha. Pythagoras læresetning) at $a^2 = b^2 + (\frac{3}{2})^2$. Om vi lar b variere fritt blant alle positive reelle tall blir ligningen av de frøskøvne ellipsene

$$\frac{x^2}{b^2 + (\frac{3}{2})^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Skyver tilbake med $\frac{3}{2}$ enheter til høyre får vi

$$\frac{(x - \frac{3}{2})^2}{b^2 + (\frac{3}{2})^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

som blir vårt endelige svar, der $b > 0$. Det er også mulig å uttrykke svaret mhp. på a .

8.1.19 Ligningen $xy + x - y = 2$ er etter alt å dømme et vridd kjeglesnitt. Om vi dreier koordinatsystemet med θ adianer mot klokken, får vi et nytt koordinatsystem (u, v) . De nye koordinatene beskriver kjeglesnittet ved

$$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v = 2 \quad (3)$$

der

$$A' = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$B' = \cos 2\theta$$

$$C' = -\frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$D' = \cos \theta - \sin \theta$$

$$E' = -\sin \theta - \cos \theta.$$

Vi lar $\theta = \frac{\pi}{4}$ slik at kryssleddet uv forsvinner. Ligningen (3) blir

$$\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2 - \sqrt{2}v = 2$$

$$u^2 - v^2 - 2\sqrt{2}v = 4$$

$$u^2 - v^2 - 2\sqrt{2}v - 2 = 2$$

$$u^2 - (v + \sqrt{2})^2 = 2$$

$$\frac{u^2}{2} - \frac{(v + \sqrt{2})^2}{2} = 1.$$

Nå har vi noe som nesten er på standardform. Senteret til denne hyperbelen er $(0, -\sqrt{2})$, og hovedaksen er $u = 0$. Her er $a = b = \sqrt{2}$. Dermed er eksentrisiteten lik

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2+2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Brennpunktene er

$$(\pm\sqrt{2+2}, -\sqrt{2}),$$

altså $(2, -\sqrt{2})$ og $(-2, -\sqrt{2})$.

Når vi vrir tilbake med $\frac{\pi}{4}$ radianer med klokken, blir punktet (u, v) sendt til

$$(u \cos \frac{\pi}{4} - v \sin \frac{\pi}{4}, +u \sin \frac{\pi}{4} + v \cos \frac{\pi}{4}) = (u \frac{\sqrt{2}}{2} - v \frac{\sqrt{2}}{2}, u \frac{\sqrt{2}}{2} + v \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Senteret blir $(1, -1)$.

Hovedasken $u = 0$ blir derimot vridd med $\frac{\pi}{4}$ radianer med klokken. Da blir ligningen $y = -x$

Brennpunktene blir $(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1)$ og $(-\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} - 1)$.

Eksentrisiteten er naturligvis bevart under rotasjon, og forblir $\sqrt{2}$.

V2020, Oppgave 1 Den gitte ligningen er $4x^2 - 5y^2 - 5 = 0$. Her kan vi simplelthen stokke om og få noe på standardform.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 5y^2 - 5 &= 0 \\ \iff 4x^2 - 5y^2 &= 5 \\ \iff \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} - y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Dette er en hyperbel på standardform med $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$ og $b = 1$ (som er “halvaksene”). Dette lar oss regne ut eksentrisiteten

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4} + 1}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \simeq 1.3416$$