



9.2.9 Vi skal evaluere rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2^n}{2^{n+2}}$, eller vise at den er divergent. For at denne rekken skal konvergere, må leddene gå mot null. Altså må

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2^n}{2^{n+2}} = 0.$$

Ved bruk av L'Hôpitals regel kan vi derimot vise at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2^n}{2^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2^n}{4 \times 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2)2^n}{4 \ln(2) \times 2^n} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

Dermed er rekken divergent.

9.2.17 Vi skal evaluere rekken $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$, eller vise at den er divergent. Hvert ledd $n^{-1/2}$ er større enn n^{-1} . Både $n^{-1/2}$ og n^{-1} er positive, ettersom $n \geq 1$. Dette medfører følgende: dersom rekken $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ divergerer, så må $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$ divergere. Vi er nå i mål; førstnevnte rekke er den harmoniske rekken.

9.2.20 Vi skal summere rekken

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots$$

Vi omskriver til $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^n k}$. Her tillater vi nemlig bruk av formelen $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Setter vi denne inn, blir rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Delbrøksoppspalting er nå et mulig verktøy. Dette gir oss en teleskoperende sum.

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2 \left(\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots \right) = 2.$$

Dette blir vårt endelige svar.

9.2.26 Vi skal vise (formelt) at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ er konvergent. Vi gjetter (uten å nøle) at dette konvergerer mot 0. Dette skjer dersom det for alle ε finnes en $N \geq 1$ slik at

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} 0 - \sum_{n=1}^N 0 \right| < \varepsilon.$$

Valget $N = 1$ fungerer, uavhengig av ε .

9.3.5 Vi skal avgjøre om rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin \frac{1}{n^2} \right|$ konvergerer eller divergerer. Her benytter vi at $0 < \sin x < x$ for alle positive reelle tall x . Spesielt er $\left| \sin \frac{1}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2}$ for alle $n \geq 1$. Ved å sammenligne med rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ følger det at rekken konvergerer.

9.3.14 Vi skal avgjøre om rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$ konvergerer eller divergerer. Her bruker vi integraltesten. Først ser vi på integralet

$$I_m = \int_m^{\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)^2}$$

der m velges senere. Substitusjonen

$$\begin{aligned} u &= \ln \ln x \\ du &= \frac{dx}{x \ln x} \end{aligned}$$

gir

$$I_m = \int_{\ln \ln m}^{\infty} \frac{du}{u^2}.$$

For at $\ln \ln m$ skal bli større enn eller lik 1, velger vi $m = 3$. Siden I_3 konvergerer, følger det fra integraltesten at rekken konvergerer.

9.3.25 Vi skal avgjøre om rekken $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - n^3}$ konvergerer eller divergerer. La oss se hva forholdstesten gir oss. La

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

der a_m er det m -te leddet i rekken. Ettersom $n \geq 4$ blir dette

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1} - (n+1)^3}}{\frac{2^n}{3^n - n^3}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{2^n}}{\frac{3^{n+1} - (n+1)^3}{3^n - n^3}} \right| \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n - n^3}{3^{n+1} - (n+1)^3} \right| \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\ln 3)^4 3^n}{(\ln 3)^4 3^{n+1}} \right| \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

I nest siste linje har vi brukt L'Hôpitals regel fire ganger. Vi har vist at $L < 1$, som ved forholdstesten betyr at rekken konvergerer.

9.3.35 Vi skal bruke integraltesten til å vise at rekken

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

konvergerer, og at grensen blir mindre enn $\frac{\pi}{2}$. Vi ser på funksjonen $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Vi vet fra MA1101 at integralet

$$\int_0^{\infty} f(x) \, dx$$

konvergerer mot verdien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(n) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Dessuten er $f(x) \geq s(x)$, der $s(x)$ er stegfunksjonen

$$s(x) = \frac{1}{1+n^2}, \quad \text{dersom } n-1 < x \leq n.$$

Siden

$$\int_0^{\infty} s(x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = S,$$

følger det at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ konvergerer til en verdi som er mindre enn $\frac{\pi}{2}$.

9.3.39 Vi skal bruke rottesten til å vise at rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

er konvergent. Vi skal undersøke størrelsen

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n}$$

der a_n er det n -te leddet i rekken. Her er

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \right)^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \\ &= e^{-1}. \end{aligned}$$

Siden $L < 1$, viser rottesten at rekken konvergerer.

9.3.41 Oppgaven ber oss anvende forholdstesten på rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

Vi ser på størrelsen

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$$

der a_m er det m -te leddet i rekken. Her er

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{2(n+1)}}{2^{2n}} \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} \frac{(2n)!}{(2(n+1))!} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4(n+1)^2 \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{8} = 1, \end{aligned}$$

der vi i siste linje har brukt L'Hôpitals regel to ganger. Når $L = 1$ gir ikke forholdstesten noen konklusjon; rekken kan både være konvergent og divergent.

Vi bes nå om å bruke identiteten

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2n}{2n-1} \frac{2n-2}{2n-3} \cdots \frac{4}{3} \frac{2}{1}.$$

Vi kan nå konkludere med at rekken divergerer; leddene går ikke mot 0 når n blir stor, ettersom hver faktor på høyresiden er større enn 1.