



Eksamen V2016: 3 [Klikk her.](#)

Eksamen V2016: 8 [Klikk her.](#)

9.4.3 Vi skal avgjøre om rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)}$ konvergerer absolutt, betinget eller divergerer. For å sjekke om rekka konvergerer absolutt, må vi finne ut om

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

konvergerer. Vi kan bruke integraltesten til å vise at denne rekka divergerer ¹. Siden $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ er en positiv og ikke-voksende funksjon på intervallet $[1, \infty)$, sier integraltesten at

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

divergerer hvis og bare hvis $\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} dx$ divergerer. Ved substitusjonen $u = \ln(x+1)$ får vi $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x+1}$, og

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} dx &= \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{u} du \\ &= \ln(u)|_{\ln(2)}^{\infty} = \infty. \end{aligned}$$

Ergo divergerer $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} dx$, og integraltesten gir at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ divergerer.

For å vise at rekka konvergerer betinget, kan vi bruke alternerende-rekke-testen. Vi har leddene $\frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)}$, og det er lett å se at fortegnet til leddene alternerer (altså er vekselvis positive og negative) siden $\cos(n\pi) = \pm 1$. Videre blir leddene alltid mindre i absoluttverdi siden

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)},$$

og vi ser også at $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)} = 0$. Alle betingelsene for alternerende-rekke-testen er derfor oppfylt, og rekka må konvergere betinget.

¹At rekka divergerer står også i merknaden under eksempel 1 i delkapittel 9.3 i læreboka.

9.4.12 Vi skal avgjøre om rekka $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin(n+1/2)\pi}{\ln \ln n}$ konvergerer absolutt, betinget eller divergerer. For å sjekke om rekka konvergerer absolutt, må vi sjekke om

$$\sum_{n=10}^{\infty} \left| \frac{\sin(n+1/2)\pi}{\ln \ln n} \right| = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{\ln \ln n}$$

konvergerer. Hvis vi husker at $\ln n$ vokser saktere enn n , ser vi også at $\ln \ln n$ må vokse mye saktere enn n . Det betyr at $\frac{1}{\ln \ln n}$ avtar mye saktere enn $\frac{1}{n}$. Siden $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer, er det derfor naturlig å tenke at $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{\ln \ln n}$ divergerer. Vi gjør dette formelt med grensesammenligningstesten:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln \ln n}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln \ln n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/\ln n} \frac{1}{1/n} \quad (\text{L'Hopital og kjerneregelen}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Grensesammenligningstesten gir derfor at $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{\ln \ln n}$ divergerer siden $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer. Med andre ord konvergerer $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin(n+1/2)\pi}{\ln \ln n}$ ikke absolutt.

La oss så bruke alternerende-rekke-testen til å vise at $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin(n+1/2)\pi}{\ln \ln n}$ konvergerer betinget. Siden $a_n = \frac{\sin(n+1/2)\pi}{\ln \ln n}$ og $\ln \ln n$ er en voksende funksjon, ser vi lett at $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ for alle n . Vi finner også at $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ av samme grunn. Derfor gir alternerende-rekke-testen at rekka konvergerer betinget hvis vi kan vise at rekka er alternerende. Dette er ikke vanskelig å vise. Fortegnet til a_n er det samme som fortegnet til $\sin(n+1/2)\pi$. Når n er et oddetall, altså $n = 2k+1$ for et heltall k , er

$$\sin(n+1/2)\pi = \sin(2k+3/2)\pi = \sin(2\pi k + 3\pi/2) = \sin 3\pi/2 = -1.$$

Når n er et partall, altså $n = 2k$ for et heltall k , er

$$\sin(n+1/2)\pi = \sin(2k+1/2)\pi = \sin(2\pi k + \pi/2) = \sin \pi/2 = 1.$$

Altså ser vi at rekka er alternerende: når n er et oddetall har a_n negativt fortegn, og når n er et partall har a_n positivt fortegn. Som nevnt gir da alternerende-rekke-testen at rekka konvergerer betinget.

9.4.25 Oppgaven spør om testen for altererende rekker kan anvendes direkte på rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sin(n\pi/2)$. Dermed skal vi avgjøre om den konvergerer.

Om vi plugges inn en passende håndfull verider for n i faktorer, og husker at sinus-funksjonen er periodisk, kan vi vise følgende:

$$\sin(n\pi/2) = \begin{cases} 0, & \text{om } n \text{ er et partall,} \\ 1, & \text{om } n = 1, 5, 9, \dots, 4n+1, \dots, \\ -1, & \text{om } n = 3, 7, 11, \dots, 4n+3, \dots \end{cases}$$

Det følger at annethvert ledd i rekken er 0. For å benytte testen for alterende rekker, må to påfølgende ha *motsatt* fortegn. Den kan ikke benyttes når visse ledd er 0, som er tilfellet her.

Om vi derimot fjerner leddene som er 0, får vi en alternerende rekke som har samme grense som den opprinnelige rekken (om den eksisterer). Den modifiserte rekken er

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ odde}}}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sin(n\pi/2) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1}\right) \sin((2k-1)\pi/2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k-1}.$$

Denne rekken er alternerende, og absoluttverdien på leddene går monotont mot 0. Testen for alternerende rekker forteller oss at denne rekken må konvergere.

9.4.27 Vi skal avgjøre om disse påstandene er sanne eller usanne.

- a) Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en konvergerende rekke, er $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent? Dette stemmer ikke. Et moteksempel er den konvergente alternerende rekken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, fordi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-1)^n \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er den harmoniske rekken, som divergerer.

- b) Om både $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergerer, er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutt konvergent? Dette er feil. Se på $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sin(n\pi/2)$, som vi inspiserte i Oppgave 9.4.25. Siden partallsleddene er 0, følger det at

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right) \sin(n\pi/2) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sin(n\pi/2).$$

Det har seg derimot ikke slik at $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sin(n\pi/2)$ er absolutt konvergent. Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{n}\right) \sin(n\pi/2)\right|$ er ganske lik rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$; vi har bare lagt til nullere mellom hvert ledd. Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ er divergent fordi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

- c) Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt, konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ absolutt? Ja, dette er riktig. Vi lurte nemlig på om summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{1}$$

konvergerer dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt. Men $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer jo absolutt dersom rekken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, som vi finner på høyresiden i (1), konvergerer.

9.4.28 a) Vi skal vise at

$$\ln n! \geq \int_1^n \ln t \, dt = n \ln n - n + 1. \quad (2)$$

Vi husker fra MA1101 at $\int \ln t \, dt = t \ln t - t$ (kan vises vha. delvis integrasjon). Dette forklarer likheten til høyre i (2):

$$\int_1^n \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^n = n \ln n - n + 1.$$

Vi skal nå velge en passende riemannsum som viser at $\ln n! \geq \int_1^n \ln t \, dt$. Vi prøver partisjonen $\{x_i\}_{i=1}^n$, der $x_i = i$. Den tilhørende høyre riemannsummen blir

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n \ln x_i (i - (i-1)) &= \sum_{i=2}^n \ln i \\ &= \sum_{i=2}^n \ln i \\ &= \ln n!. \end{aligned}$$

I siste linje har vi brukt logaritmeregelen $\ln ab = \ln a + \ln b$. Ettersom $\ln$ er en voksende funksjon, er den høyre riemannsummen større enn eller lik verdien til integralet. Vi har altså vist at

$$\ln n! \geq \int_1^n \ln t \, dt,$$

som vi skulle.

b) Nå skal vi bestemme x -verdiene der potensrekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$

- (i) konvergerer absolutt,
- (ii) konvergerer betinget,
- (iii) eller divergerer.

Det kan være gunstig å bemerke seg når denne følgen konvergerer (ikke nødvendigvis absolutt). Om x er ikke-negativ, konvergerer rekken presist når den konvergerer absolutt. Anta derimot at x negativ. Da er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(-|x|)^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n} |x|^n.$$

Denne konvergerer dersom leddene $\frac{n!}{n^n} |x|^n$ går monotont mot 0. Det kan sjekkes at

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} |x|^{n+1} - \frac{n!}{n^n} |x|^n = n! |x|^n \left(\frac{1}{(n+1)^{n+1}} - \frac{1}{n^n} \right)$$

som er negativ for alle x . Dessuten er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} |x|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n} \frac{2|x|}{n} \dots \frac{(n-1)|x|}{n} \frac{n|x|}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n} = 0.$$

Siste ulikhets fungerer strengt tatt kun når $n \geq |x|$, men det er likevel gyldig når vi tar grenseverdien. Vi har vist at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$ konvergerer når $x \leq 0$.

Vi undersøker hvor vi har absolutt konvergens, altså hvor rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!|x|^n}{n^n}$ konvergerer. Vi benytter forholdstesten, slik oppgaven vinker. Vi jobber derfor med størrelsen ρ , som defineres og forenkles som følger:

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!|x|^n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} \\ \rho &= \frac{|x|}{e}.\end{aligned}$$

I siste linje bruker vi definisjonen av eulertallet e . Forholdstesten forteller oss at

- (i) rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!|x|^n}{n^n}$ konvergerer (dvs. at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$ konvergerer absolutt) dersom $\rho < 1$,
- (ii) den kan både konvergere og divergere når $\rho = 1$
- (iii) og den divergerer når $\rho > 1$.

Med tanke på at $\rho = \frac{|x|}{e}$ følger det at

- (i) rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$ konvergerer absolutt dersom $|x| < e$,
- (ii) den kan både konvergere absolutt, konvergere betinget og divergere når $|x| = e$
- (iii) og kan både konvergere betinget og divergere når $|x| > e$.

Vi må gå manuelt til verks når vi sjekker absolutt konvergens i $x = \pm e$. I begge tilfeller sjekker vi om rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$ konvergerer. Nå blir ulikheten $\ln n! \geq n \ln n - n + 1$ nyttig. Om vi eksponensierer begge sider får vi

$$n! \geq n^n e^{-n+1} \implies \frac{n!}{n^n} \geq e^{-n+1}.$$

Således er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n+1} e^n = \sum_{n=1}^{\infty} e.$$

Ettersom høyresiden er divergent, divergerer også venstresiden.

Dersom $x > e$, kan vi bruke samme fremgangsmåte som i avsnittet over til å vise at rekken divergerer.

Fra første avsnitt at rekken konvergerer for $x \leq 0$. Vi er omsider klare til å konkludere med at

- (i) rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$ konvergerer absolutt dersom $|x| < e$,
 (ii) den konvergerer betinget når $x \leq -e$
 (iii) og den divergerer når $x \geq e$.

9.5.1 Vi skal finne sentrum, konvergensradius og konvergensintervall for potensrekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n+1}}$. Vi ser umiddelbart at sentrum for potensrekka er 0 (siden potensrekka er på formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-0)^n$). For å finne konvergensradien bruker vi forholdstesten, så vi finner

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+2}}|x|^{2n+2}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}|x|^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}|x|^2 = |x|^2.$$

Forholdstesten sier derfor at rekka konvergerer for $|x|^2 < 1$ – altså $x \in (-1, 1)$ – og divergerer når $|x|^2 > 1$. Spesielt er konvergensradien lik 1. For å finne konvergensintervallet må vi sjekke om rekka konvergerer i endepunktene $x = \pm 1$. Både for $x = 1$ og $x = -1$ får vi rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Denne rekka divergerer, siden det er ei p-rekke med $p = 1/2$. Derfor inneholder konvergensintervallet ikke endepunktene, så konvergensintervallet er $(-1, 1)$.

9.5.3 Vi skal finne sentrum, konvergensradius og konvergensintervall for potensrekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x+2}{2}\right)^n$. Siden vi kan skrive rekka som $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} (x - (-2))^n$, er rekka på formen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$ for $c = -2$. Det betyr at sentrum er -2 . For å finne konvergensradius bruker vi forholdstesten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)} \left|\frac{x+2}{2}\right|^{n+1}}{\frac{1}{n} \left|\frac{x+2}{2}\right|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)} \left|\frac{x+2}{2}\right| = \frac{1}{2}|x+2|.$$

Forholdstesten sier at rekka konvergerer for $\frac{1}{2}|x+2| < 1$, altså $|x+2| < 2$, som betyr at² $x \in (-4, 0)$. Forholdstesten sier også at rekka divergerer for $|x+2| > 2$, som må bety³ at konvergensradien er 2. For å finne konvergensintervallet må vi sjekke om potensrekka konvergerer i endepunktene $x = -4$ og $x = 0$. Når $x = -4$ har vi rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{-2}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Dette er den alternerende harmoniske rekka, som vi vet at konvergerer betinget (det er også lett å vise ved alternerende-rekke-testen). Når $x = 0$ har vi rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

²Husk at en ulikhet på formen $|x+2| < 2$ svarer til to ulikheter $x+2 < 2$ og $-2 < x+2$.

³Husk at konvergensradien R er et tall slik at rekka konvergerer for $|x-c| < R$ og divergerer for $|x-c| > R$. I vårt tilfelle er $c = -2$.

altså den harmoniske rekka som vi vet at divergerer. Dermed er inneholder konvergensintervallet venstre endepunkt $x = -4$, men ikke høyre endepunkt $x = 0$. Derfor er konvergensintervallet $[-4, 0)$.