



Norges teknisk-naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

MA1102 Grunnkurs
Analyse II
Vår 2021

Løsningsforslag — Øving 8

A1.14 Vi skal finne modulusen og argumentet til det komplekse tallet $x = -\sqrt{3} - 3i$.

Formelene for disse størrelsene er henholdsvis

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\theta = \arg z = \arctan \frac{b}{a},$$

der a og b henholdsvis er den reelle og imaginære delen av z . Vi setter inn $a = -\sqrt{3}$ og $b = -3$ og får

$$r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{12}$$
$$\theta = \arg z = \arctan \frac{-3}{-\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Vi bes til sist om å uttrykke z på polarform. Generelt er dette gitt som

$$z = re^{i\theta}$$

som i vårt tilfelle blir

$$z = -\sqrt{3} - 3i = \sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

A1.23 La z være et komplekst tall med $|z| = \frac{1}{2}$ og $\arg z = -\frac{\pi}{3}$. Vi skal finne den reelle og imaginære delen til z . Formelene for disse er henholdsvis

$$a = |z| \cos \arg z$$
$$b = |z| \sin \arg z$$

som i vårt tilfelle blir

$$a = \frac{1}{2} \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{4}$$
$$b = \frac{1}{2} \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

I konklusjon er $z = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

A1.31 Vi skal gi en geometrisk beskrivelse av mengden

$$M = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3 + 4i| \leq 5\}.$$

Først tar vi en titt på mengden

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 5\}.$$

Om vi tegner denne i det komplekse plan (også kjent som wesselplanet, argandplanet eller gaussplanet), får vi en lukket disk med senter i origo og radius 5. Den mer generelle mengden

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq 5\}.$$

beskriver en lukket disk med samme radius, men med senter i a . Derfor beskriver M en lukket disk med senter i $3 - 4i$ og radius 5.

A1.33 Vi skal gi en geometrisk beskrivelse av mengden

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : \pi \leq \arg z \leq \frac{7\pi}{4} \right\}.$$

Vi husker at argumentet angir vinkelen som skal til for å sikte på z fra origo. Dermed er M området innenfor to stråler ut av origo, med vinkler π og $\frac{7\pi}{4}$.

A1.48 Vi skal bruke de Moivres setning til å uttrykke $\cos 3\theta$ og $\sin 3\theta$ med hensyn på $\cos \theta$ og $\sin \theta$. De Moivres setning sier at

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

for alle $\theta \in \mathbb{R}$ og positive heltall n . Spesielt er

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta.$$

Binomialteoremet lar oss hankses med venstresiden.

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^3 &= \cos 3\theta + i \sin 3\theta \\ \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta + 3i^2 \cos \theta \sin^2 \theta + i^3 \sin^3 \theta &= \\ \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta &= \\ \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) &= \cos 3\theta + i \sin 3\theta. \end{aligned}$$

Sammenligner vi de reelle og imaginære delen får vi svarene

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta, \\ \sin 3\theta &= 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta. \end{aligned}$$

A1.49 a) Vi skal løse ligningen $\bar{z} = \frac{2}{z}$. Skriv z på polarform; det finnes nemlig $r, \theta \in \mathbb{R}$ slik at $z = re^{i\theta}$. Da er $\bar{z} = re^{-i\theta}$. Vi setter dette inn i ligningen og får

$$\begin{aligned} re^{-i\theta} &= \frac{2}{re^{i\theta}} \\ r^2 &= 2. \end{aligned}$$

Med andre ord må $r = \sqrt{2}$, og dette er alle løsningene.

- b) Om vi benytter samme fremgangsmåte for $\bar{z} = -\frac{2}{z}$, resulterer dette i at $r = -\sqrt{2}$. Dette er umulig, som vil si at ligningen ikke har noen løsning.

A1.52 Vi skal finne alle tredjerøttene til $z = -8i$. På polarform er $z = 8e^{\frac{3i\pi}{2}}$. Dermed er den primitive tredjeroten $z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = 2i$. De resterende tredjerøttene er

$$z_2 = z_1 e^{\frac{i2\pi}{3}} = 2e^{\frac{7i\pi}{6}}$$

og

$$z_3 = z_1 e^{\frac{i4\pi}{3}} = 2e^{\frac{11i\pi}{3}}.$$

Ingen har bedt oss om å uttrykke røttene på en spesiell måte, så vi gir oss her.

A1.55 Vi skal finne alle komplekse løsninger til ligningen

$$z^4 + 1 - i\sqrt{3} = 0$$

Dette er det samme som å finne alle fjerderøttene til $z = -1 + i\sqrt{3}$. På polarform er $z = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Dermed er den primitive fjerderoten $z_1 = 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i\pi}{6}}$. De resterende tredjerøttene er

$$z_2 = z_1 e^{\frac{i2\pi}{4}} = 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i\pi}{6}}e^{\frac{i2\pi}{4}} = 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

$$z_3 = z_1 e^{\frac{i4\pi}{4}} = 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{7i\pi}{6}},$$

$$z_4 = z_1 e^{\frac{i6\pi}{4}} = 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{5i\pi}{3}}.$$