fra den *-merkede seksjonen *4.4. Legg merke til at i dette teoremet er problemstillingen litt annerledes enn ovenfor – denne gangen vet vi at grensefunksjonene er kontinuerlig, og ønsker å vise (under passende forutsetninger) at konvergensen er uniform. Husk at en funksjonsfølge $\{f_n\}$ kalles *voksende* dersom følgen $\{f_n(x)\}$ er voksende for alle x i definisjonsområdet.

11.3.10 Dinis teorem Anta at $\{f_n\}$ er en voksende følge av kontinuerlige funksjoner som konvergerer punktvis mot en kontinuerlig funksjon f på et lukket, begrenset intervall $[a, b]$. Da konvergerer $\{f_n\}$ uniformt mot f på $[a, b]$.

Bevis: Vi antar at $\{f_n\}$ *ikke* konvergerer uniformt og utleder en selvmotsigelse. For å forenkle resonnementet ser vi på funksjonene $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$ – ut ifra våre forutsetninger er dette kontinuerlige funksjoner som avtar punktvis, men ikke uniformt mot 0 (sjekk dette!). Siden konvergensen ikke er uniform, finnes det en $\epsilon > 0$ slik at $d_{[a,b]}(g_n, 0) > \epsilon$ for alle n. Det betyr at for hver n finnes det et punkt $x_n \in [a, b]$ slik at $g_n(x_n) > \epsilon$. Ifølge teorem 4.4.4 har følgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en konvergent delfølge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. La $c \in [a, b]$ være grensen til $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Siden $\{g_n\}$ konvergerer punktvis mot 0, finnes det en $N \in \mathbb{N}$ slik at $g_N(c) < \frac{\epsilon}{2}$. Siden g_N er kontinuerlig, finnes det en liten omegn $I = (c - \delta, c + \delta)$ om c slik at $g_N(x) < \epsilon$ for alle $x \in I$ (dersom c er et av endepunktene a, b i intervallet, blir dette en ensidig omegn som ser litt annerledes ut, men resonnementet fungerer like godt i dette tilfellet). Siden $\{g_n\}$ er avtagende, betyr det at $g_n(x) < \epsilon$ for alle $x \in I$ og alle $n \geq N$. Men dette er umulig; siden $x_{n_k} \to c$ må det finnes en $n_k > N$ slik at $x_{n_k} \in I$. Ifølge det vi nettopp har vist, er da $g_{n_k}(x_{n_k}) < \epsilon$, men per definisjon av x_{n_k} er $g_{n_k}(x_{n_k}) > \epsilon$. Dermed har vi fått vår selvmotsigelse, og antagelsen om at $\{f_n\}$ *ikke* konvergerer uniformt, må være gal. ■

Bemerkning

Resultatet ovenfor gjelder selvfølgelig like godt om følgen er avtagende istedenfor voksende. Det gjelder imidlertid *ikke* dersom vi fjerner betingelsen om at intervallet skal være lukket og begrenset.

Oppgaver i seksjon 11.3

1. Vis at funksjonsfølgen $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot f.

a) $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n; \quad f(x) = e^{-x^2}$

b) $f_n(x) = \dfrac{n^2x + 7\sin x}{n^2e^x + nx^3}; \quad f(x) = xe^{-x}$

c) $f_n(x) = \sqrt{n^2 + nx} - n; \quad f(x) = \dfrac{x}{2}$

d) $f_n(x) = n(x^{2/n} - 1); \quad f(x) = \ln x^2$

2. Finn avstanden $d_A(f, g)$:

a) $f(x) = x, \quad g(x) = x^2 - x, \quad A = [0, 1/2]$

b) $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x, \quad A = [0, \pi]$

c) $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x, \quad A = [0, 1]$

3. La $f_n(x) = \sqrt[2n+1]{x}$.

a) Vis at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot en funksjon f.

b) Vis at grensefunksjonen f ikke er kontinuerlig.

c) Konvergerer $\{f_n\}$ uniformt?

4. Vis at dersom $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot f, så konvergerer den også punktvis mot f.

5. (UiO) For hvert naturlig tall n er $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definert ved

$$f_n(x) = e^{-x}\left(\frac{x}{n}\right)^{ne}.$$

a) Finn den største og minste verdien til f_n og skisser grafen.

b) Vis at følgen $\{f_n\}$ konvergerer punktvis. Konvergerer den også uniformt?

6. La $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Bestem eventuelle ekstremalpunkter og ekstremalverdier til f_n. Skisser grafen for noen verdier av n.

b) Vis at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot en funksjon f. Er konvergensen uniform i intervallet $[0, 1]$?

7. (UiO) Vis at følgen $\{f_n\}$ der

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}$$

konvergerer punktvis mot en funksjon f. Avgjør om konvergensen er uniform i hvert av intervallene $[0, \infty)$, $[a, \infty)$ for $a > 0$, $[0, b]$ for $b > 0$.

8. La $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$ for $x > 0$.

a) Vis at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot $f(x) = \ln x$.

b) Vis at konvergensen ikke er uniform på $(0, \infty)$.

c) Vis at konvergensen er uniform på ethvert intervall $[a, b]$, der $0 < a < b$.

9. (UiO) For alle $n \in \mathbb{N}$ la

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x}{1 - x^{2n+1}} & \text{når } x \neq 1 \\[2mm] \dfrac{1}{2n + 1} & \text{når } x = 1 \end{cases}$$