

$$H(0) = \left(\int_0^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 + 2 \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+x^2)}}{1+x^2} dx = 0 + 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$$

Ser vi isteden på grenseverdien til $H(n)$ når $n \rightarrow \infty$, får vi

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} H(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+x^2)}}{1+x^2} dx$$

Den første av disse grenseverdiene er $\left(\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2$ ved definisjonen av uegentlig integral, mens den andre er null ifølge setning 11.4.1 siden $e^{-\frac{x^2}{2}(1+x^2)}/(1+x^2)$ konvergerer uniformt mot 0 (legg merke til at $e^{-\frac{x^2}{2}(1+x^2)}/(1+x^2) \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$). Dermed er

$$\frac{\pi}{2} = \left(\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2,$$

det vil si $\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Siden integranden $e^{-\frac{x^2}{2}}$ er symmetrisk om 0, er

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

så

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Dette er uttrykket vi skulle frem til.

Oppgaver i seksjon 11.4

Oppgaver merket med * er tilpasset de *-merkede delene av seksjonen.

1. La følgen $\{f_n\}$ være gitt ved

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}.$$

- a) Vis at $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot en grensefunksjon f .
b) Vis at $\{f'_n\}$ ikke konvergerer mot f' .

2. La følgen $\{f_n\}$ være gitt ved

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{hvis } x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

- a) Vis at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot en grensefunksjon f .

- b) Vis at $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 f(x) dx$.