



- 1 a) Bruk Newton's metode to ganger til å tilnærme et nullpunkt til funksjonen

$$f(x) = x^3 + 2x - 1$$

på intervallet  $[0, 1]$ . Bruk  $x_0 = 0$  som startverdi.

- b) Bruk Newton's metode til å tilnærme minimumsverdien til funksjonen

$$f(x) = (x - 1)^2 + \cos(x^2),$$

på intervallet  $[0, 2]$ . Bruk startverdien  $x_0 = 2$ . Du trenger kun å bruke Newtons metode en gang.

- 2 a) Bevis at følgen  $(x_0, T(x_0), T(T(x_0)), T(T(T(x_0))), \dots)$  konvergerer for  $T(x) = \frac{1}{1+x^2}$  og enhver  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

- b) Bevis at følgen  $(x_0, T(x_0), T(T(x_0)), T(T(T(x_0))), \dots)$  konvergerer for  $T(x) = \cos(x)$  og enhver  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

- 3 Løs differensiallikningen

$$y'y(1 + x^2) - x = 0$$

- 4 Sjekk at differensiallikningen

$$x'(t) = -tx(t), \quad x(0) = 1$$

tilfredsstiller betingelsene i Picard-Lindelöf teoremet og finn de tre første Picard iterasjonene  $(x_1, x_2, x_3)$ . Begynn med  $x_0(t) = 1$  for å ta hensyn til initialbetingelsen.

Kjenner du igjen hvilken taylorrekke dette går mot? Hvis ikke er det helt i orden!

*Hint:*  $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n \cdot n!$ .

**Bonus:**

- 6 I denne oppgaven skal vi bevise Picard-Lindelöf teoremet. Picard-Lindelöf teoremet gir betingelser som sørger for at

$$x'(t) = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

har en løsning i en omegn om  $t_0$ .

Anta at  $f$  er kontinuerlig på

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| < a, |x - x_0| < b\}$$

og begrenset av  $c \in \mathbb{R}$ . Videre antar vi at  $f$  er *Lipschitz* i andre argument, som betyr at det finnes en positiv konstant  $k$  slik at

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|$$

for alle  $(t, x)$  og  $(t, y)$  i  $R$ .

- a) Vis at for å vise at den ordinære differensiallikning har en løsning er det nok å vise at det finnes en funksjon  $x \in C^1[t_0 - a, t_0 + a]$  slik at

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

*Hint: Deriver;  $x \in C^1$  betyr at  $x$  er kontinuerlig deriverbar.*

- b) Betrakt intervallet  $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$  og definer den lukkede mengden

$$X = \left\{ y \in C(J) : y(t_0) = x_0, \sup_{t \in J} |x_0 - y(t)| \leq c\beta \right\}$$

(vi antar  $\beta$  er så liten at  $c\beta < b$ ). Vis at operatoren  $T$  definert ved

$$T(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad t \in J$$

sender  $X$  til  $X$ . Altså vis at hvis  $y$  er i  $X$  så er også  $T(y)$  i  $X$ .

- c) Vis at for  $y_1, y_2 \in X$  så følger det at,

$$d_\infty(T(y_1), T(y_2)) \leq k\beta d_\infty(y_1, y_2).$$

- d) Finn en betingelse på  $\beta$  slik at vi kan bruke Banachs fikspunkt teorem fixed point theorem til å konkludere med at det finnes en unik  $x \in C(J)$  slik at

$$T(x) = x.$$

- e) Bruk det du har vist så lang til å konkludere med at

$$x'(t) = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

har en unik løsning på  $C^1(J)$ .