Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Department of Mathematical Sciences

MA1102
Grunnkurs i analyse II
Vår 2024

Øving 12

1 La $y(x)$ være løsningen til differensiallikningen

$$y' = x + y, \qquad y(0) = 1.$$

Bruk Eulers forbedreded metode med steglengde $h = 0.1$ tilnærme verdiene $y(0.1)$ og $y(0.2)$.

Husk: Eulers forbedreded metode kan skrives som

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))\big].$$

2 Vi betrakter differensialligningen

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y} - 1$$

Anta at $y(x)$ er en løsning av differensiallikningen og at $y(0) = 1$. Bruk Eulers metode med skrittlengde $h = 0,1$ til å finne en tilnærmet verdi for $y(0,2)$.

3 Bruk Weierstrass M-test for å vise at de følgende funksjonene er kontinerlig for alle x i $\mathbb{R}$

a)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(27^n x)}{3^n}.$$

b)

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \sin\left(\frac{x}{27^n}\right)$$

Hint for (b): $|\sin(x)| \leq |x|$.

4 For hver av utsagnene under; avgjør om påstanden er *sann* eller *usann*. Hvis påstanden er usann gi et motekesmpel eller en forklaring på hvorfor påstanden er usann. Du trenger ikke å gi et bevis dersom påstanden er sann.

a) For enhver kontinunerlig funksjon $f : [0, 1] \to [0, 1]$ finnes det et punkt a i $[0, 1]$ slik at $f(a) = a$.

b) For enhver kontinunerlig funksjon $f : (0, 1) \to (0, 1)$ finnes det et punkt a i $(0, 1)$ slik at $f(a) = a$.

c) Følgen $\{\frac{1}{\ln n}\}_{n=2}^{\infty}$ er cauchy.

d) Rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

konvergerer.

e) Mengden $(0, 1) \cup 2$ er kompakt.

f) La $\{a_n\}$ være en begrenset reell følge. Da har $\{a_n\}$ en konvergent delfølge

g) Vi har at $2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

h) For enhver kontinuerlig funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er mengden

$$f^{-1}[0, 1] := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [0, 1]\}$$

en kompakt delmengde av $\mathbb{R}$.

Merk: Grunnet påskeferie ble det bare avholdt en forelesning i MA1102 i uke 14. Denne øvingen inneholder i derfor i tillegg til de numeriske oppgavene som er knyttet til forelesningen i uke 14 også et utvalg oppgaver fra emner som er dekket tidligere i kurset.