



Husk å begrunne alle svarene dine.

- 1 La $\{a_j\}$ være en reell følge. Bevis at hvis

$$\liminf\{a_j\} = \limsup\{a_j\},$$

så konvergerer følgen $\{a_j\}$. Vis den omvendte implikasjonen også.

- 2 La $a < b$ være reelle tall. Gi et eksempel på en følge slik at \limsup er b og \liminf er a .

- 3 For hver av de følgende rekkene; bestem om rekken er konvergent eller divergent.

(a)

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots$$

(b)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2^j)^2}{j!}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{3n^2 - 4}$$

- 4 Anta at $a_j > 0, b_j > 0, \sum_j a_j$ konvergerer, og at $\sum_j b_j$ konvergerer. Konvergerer $\sum_j a_j b_j$?

- 5 En måte å definere Eulers tall, e på er

$$e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}. \quad (1)$$

(a) Vis at rekken gitt ved (1) er konvergent.

(b) Bruk definisjonen av e gitt i (1) til å bevise at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Hint for (b): Binomialteoremet.