Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Department of Mathematical Sciences

MA1102
Grunnkurs i analyse II
Vår 2024

Øving 6

1 For hver av rekkene under; bestem om de konverger betinget, konvergerer absolutt eller divergerer.

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^4}$$

2 Vi har sett i forelesning at en uendelig union av åpne mengder er åpne. I denne oppgaven skal vi vise tilsvarende resultat for lukkede mengder.

a) Bevis at det uendelige snittet av lukkede mengder er lukket. Det vil si; gitt en sammling $(E_n)_n$ med lukkede mengder vis at

$$\bigcap_n E_n$$

er lukket.

b) Gi et eksempel på en uendelig samling med lukkede mengder $(E_n)_n$ slik at unionen $\bigcup_n E_n$ ikke er lukket.

c) Gi et eksempel på en uendelig samling med åpne mengder $(U_n)_n$ slik at snittet $\bigcap_n U_n$ ikke er åpent.

3 Bestem om de følgende mengdene er åpen, lukket, og/eller kompakt. Du trenger ikke begrunne svaret.

a)

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\}$$

b)

$$\mathbb{R}$$

c)

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

d)

$$(-1, 1) \cup [2, 3]$$

$\boxed{4}$ I topologi definerer vi som oftest **avstanden** $d(A, B)$ mellom to mengder A, B som

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$$

der $d(a, b)$ er avstanden mellom a og b. Husk at $(a_n)_n$ konvergerer til a hvis $\lim_{n \to \infty} d(a_n, a) = 0$.

La K være kompakt og L lukket, og anta at de to mengdene er disjunkte. Vis at avstanden mellom de to mengdene er positiv.
Hint: Anta at avstanden er 0 *og jobb mot en selvmotsigelse.*

$\boxed{5}$ Gi eksempler på:

a) En åpen ubgrenset delmengde av $\mathbb{R}$.

b) To disjunkte mengder med avstand 0.

c) En kompakt mengde med endelig antall elementer.

d) En kompakt tellbar uendelig mengde.