Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Department of Mathematical Sciences

Husk å begrunne svarene dine!

$\boxed{1}$ **a)** La $f(x) = \cos(x)$, finn $f^{-1}((0,1))$, det vil si finn inversbildet til $(0,1)$ under funksjonen f. Er dette en åpen mengde?

b) La f være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & x < 0, \\ e^{-x} + 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Bevis at denne funksjonen *ikke* er kontiuerlig ved å finne en åpen mengde U slik at $f^{-1}(U)$ ikke er åpen.

c) La $f(x) = e^{-x^2}$, beregn $f^{-1}([1,2])$. Det vil si bergen inversbildet til $[1,2]$ under f.

Hint: Husk at for en funksjon $f : D \to \mathbb{R}$ og en delmengde $W \subset \mathbb{R}$ definerer vi

$$f^{-1}(W) = \{x \in D : f(x) \in W\}.$$

Vi kaller $f^{-1}(W)$ for *inversbildet til* W *under* f. For (b) husk også at for en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, så følger det at f er kontinuerlig hvis og bare hvis inversbildet av en hver åpen mengde under f er åpen. (Se også Definisjon 5.16 og Teorem 5.17 i Krantz.)

$\boxed{2}$ Funksjonen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to [-1,1], x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ er kontinuerlig for $x \neq 0$ siden det er komposisjonene av to kontinuerlige funksjoner. Bevis at f ikke kan utvides til en kontinuerlig funksjon for hele $\mathbb{R}$ ved å vise at grensen

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

ikke eksisterer.

$\boxed{3}$ **a)** Gi et eksempel på en kontinuerlig funksjon f og en åpen mengde U slik at $f(U)$ ikke er åpen.

b) Gi et eksempel på en funksjon f som ikke er kontinerlig og en lukket mengde E slik $f^{-1}(E)$ er åpen.

$\boxed{4}$ Anta at f er kontinuerlig på $[0,1]$ og at $f(x)$ er positiv for et hvert rasjonalt tall x. Følger det da at $f(x)$ er positiv for alle x i $\mathbb{R}$?

$\boxed{5}$ La f være en kontinuerlig funksjon på en kompakt mengd $K \subset \mathbb{R}$. Bevis at det finnes a og b i K slik at $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ for alle x i K.

Hint: Vi har tideligere sett at for en kontinuerlig funksjon er bildet til en kompakt mengde også kompakt.

$\boxed{6}$ I forelesning har vi definert hva det vil si at en funksjon $f : D \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig i et punkt på følgende måte: Vi sier at f er kontinuerlig i punktet a i D hvis for enhver følge $\{x_n\}$ i D som konvergerer til a så følger det at

$$\lim_{x_n \to a} f(x_n) = f(a).$$

Vis at dette er ekvivalent med måten vi definerte kontinutiet på i MA1101 ved bruk av $\varepsilon - \delta$. Altså: f er kontinuerlig i punktet a i D hvis for enhver $\varepsilon > 0$ så eksisterer det $\delta > 0$ slik at hvis $|x - a| < \delta$ så følger det at $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Hint: For andre del av bevsiet, der du skal vise at definisjonen av kontinutiet med følger impliserer kontinutiet med $\varepsilon - \delta$ definisjonen kan det være nyttig å gjøre et kontrapositivt bevis.