Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Department of Mathematical Sciences

MA1102
Grunnkurs i analyse II
Vår 2024

Øving 8

1 For hver av funksjonsfølgene $(f_n)_n$ under og de tilhørende definisjonsområdene, bestem om følgen konverger punktvis mot en funkjon f på definisjonsområdet. Hvis funksjonsfølgen konverger punktvis, avgjør om funksjosnfølgen også konverger uniformt mot f.

a) $I = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = xe^{-nx^2}$.

b) $I = [-1, 1] \quad f_n(x) = x^{2n+1}$.

c) $I = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n+n(x-n)^2}$.

d) $I = (0, \infty), \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

e) $I = [0, \infty), \quad f_n(x) = ne^{-nx}$.

f) $I = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx}{n+x}$.

Hint: Husk at hvis $(f_n)_n$ er en følge med kontinuerlige funksjoner som konvergerer uniformt mot f, så må f også være kontinuerlig.

2 Bevis at hvis funksjonsfølgen $(f_n)_n$ er konverger uniformt mot f på $I \subset \mathbb{R}$, så konvergerer også følgen punktvis. Gi også et eksempel som viser at det motsatte ikke holder.

3 La $(f_n)_n$ være gitt ved

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n}.$$

a) Vis at $(f_n)_n$ konvergerer uniformt mot en funksjon f.

b) Vis at $(f'_n)_n$ *ikke* konvergerer til f'.

4 La $(f_n)_{n\geq 2}$ være en funksjonsfølge der $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ er gitt ved

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ n, & 0 < x \leq 1/n, \\ 0, & 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Bestem

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$

$\boxed{5}$ La $(f_n) : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ være funksjonsfølgen gitt ved

$$f_n(x) = \frac{n^2}{1 + n^2x^2 + n^2}.$$

Denne funksjonsfølgen konvergerer uniformt mot $f(x) = 1/(1 + x^2)$ på $[-1, 1]$. (Du trenger ikke å vise dette). Bestem

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)dx.$$