



Faglig kontakt under eksamen: Heidi Dahl  
Telefon: 7355 0242

Eksamen i fag MA1103 Flerdimensjonal analyse  
Bokmål  
Onsdag 26. mai 2004  
Kl. 09.00-13.00

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S

Sensur faller 16.06.2004.

Alle svar skal begrunnes. Lykke til!

**Oppgave 1** Gitt dobbeltintegralet

$$\int \int_D f(x, y) dA = \int_0^1 \int_{x^{\frac{1}{3}}}^1 f(x, y) dy dx.$$

- Tegn området  $D$  i  $xy$ -planet.
- Beregn integralet når  $f(x, y) = \sqrt{1 - y^4}$ .

**Oppgave 2** La funksjonen  $f$  være gitt ved

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} + \sqrt{|x|} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Avgjør om  $f$  er kontinuerlig i  $(0, 0)$ .
- Avgjør om de partiellderiverte  $\frac{\partial f}{\partial x}$  og  $\frac{\partial f}{\partial y}$  eksisterer i  $(0, 0)$ , og finn i så fall verdiene.

**Oppgave 3** Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz e^x + yz) \hat{\mathbf{i}} + (z e^x + xz - 2y) \hat{\mathbf{j}} + y h(x) \hat{\mathbf{k}}.$$

- a) Bestem funksjonen  $h(x)$  slik at  $\mathbf{F}$  blir et konservativt vektorfelt, og finn i dette tilfellet en potensialfunksjon  $\phi(x, y, z)$  slik at  $\mathbf{F} = \nabla\phi$ .
- b) Vis at for alle konservative vektorfelt  $\mathbf{G}(x, y, z)$  gjelder  $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{0}$ .

**Oppgave 4** Et område  $B$  i rommet er gitt ved ulikhetene

$$\begin{aligned} z &\leq 8 - x^2 - y^2 \\ z &\geq x^2 + y^2 \end{aligned}$$

La  $S$  betegne overflata til  $B$ , med enhetsnormal  $\hat{\mathbf{N}}$  pekende ut av  $B$ .

- a) Lag en skisse av området  $B$ .
- b) Beregn fluksen

$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

til  $\mathbf{F}$  gjennom  $S$  direkte, der  $\mathbf{F} = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}$ .

- c) Kontroller svaret i a) ved å gjøre bruk av divergensteoremet (Gauss' teorem).

**Oppgave 5** En båt legger fra land og nærmer seg et sirkulært område

$$D : x^2 + y^2 \leq 4$$

hvor havbunnstopografien kan beskrives ved funksjonen

$$f(x, y) = 5e xy e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

Det oppgis at over funksjonens bunnpunkt på  $D$  er vannhøyden 14 meter. Båtens kjøler stikker 2,5 meter ned i vannet.

Kan båten kjøre over hele området  $D$  uten å skrape mot bunnen?