Løsningsforslag til 1. obligatoriske øving i MA1103 våren 2007

5. februar 2007

Eksamen SIF5005 vår 98: oppgave 1 a) En kjegle har generelt ligning

$$az^2 = x^2 + y^2 \quad , a > 0$$

For kurven K gitt ved

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\mathrm{e}^{-t}\cos t, \mathrm{e}^{-t}\sin t, \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t})$$

oppfylder koordinatfunksjonene følgende:

$$\begin{aligned} x(t)^2 + y(t)^2 &= \mathrm{e}^{-2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) = \mathrm{e}^{-2t} \\ z(t)^2 &= 2\mathrm{e}^{-2t} \end{aligned}$$

eller m.a.o: Alle punkter på K oppfylder $x(t)^2 + y(t)^2 = \frac{1}{2}z(t)^2$ og derfor ligger K på kjegleflaten $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2$

b) Tangenten til K i punktet $\vec{r}(t_0)$ har parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + x'(t_0)t \\ y(t) &= y(t_0) + y'(t_0)t \qquad , t \in \mathbb{R} \\ z(t) &= z(t_0) + z'(t_0)t \end{aligned}$$

Dette giver

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{-t_0}\cos t_0 + (-\mathrm{e}^{-t_0}\cos t_0 - \mathrm{e}^{-t_0}\sin t_0)t = \mathrm{e}^{-t_0}(\cos t_0 - t(\cos t_0 + \sin t_0)) \\ x(t) &= \mathrm{e}^{-t_0}\sin t_0 + (-\mathrm{e}^{-t_0}\sin t_0 + \mathrm{e}^{-t_0}\cos t_0)t = \mathrm{e}^{-t_0}(\sin t_0 + t(\cos t_0 - \sin t_0)) \\ z(t) &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t_0} - \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t_0}t = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t_0}(1 - t) \end{aligned}$$

Skjæring med xy-planet er når $z = 0$ eller m.a.o. når $t = 1$,

$$x(t_0) = -\mathrm{e}^{-t_0}\sin t_0, \quad y(t_0) = \mathrm{e}^{-t_0}\cos t_0$$

Når t_0 varierer beskriver dette en spiral som går innover og med klokken når t_0 vokser.

Eksamen SIF5005 vår 00: oppgave 4 Planet $z = 4x - 2y$ har normalvektor$(4, -2, -1)$ og tangentplanet til flaten $z = x^2 - y^2$ har i punktet (x_0, y_0, z_0) normalvektor gitt ved $(2x_0, -2y_0, -1)$. En ser lett at disse to normalvektorer er parallelle hvis og bare hvis $x_0 = 2$ og $y_0 = 1$. Men da er $z_0 = 2^2 - 1^1 = 3$ og

$$P_0(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 3)$$

Ligningen for tangentplanet i dette punktet blir:

$$4x - 2y - z = 4x_0 - 2y_0 - z_0 = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = 3$$

Eksamen SIF5005 vår 00: oppgave 6 a) Vi skal finne enhetstangenten til C

$$\begin{aligned}\hat{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{(x'(t), y'(t), z'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}} \\ &= \frac{(-\sqrt{2}\sin t, -\sqrt{2}\sin t, 2\cos t)}{\sqrt{2\sin^2 t + 2\sin^2 t + 4\cos^2 t}} \\ &= \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \cos t\right)\end{aligned}$$

Vi skal og bestemme krumningen κ av C

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{8} \\ &= \frac{1}{4}\left\|\det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t & -\sin t & \sqrt{2}\cos t \\ -\cos t & -\cos t & -\sqrt{2}\sin t\end{pmatrix}\right\| \\ &= \frac{1}{4}\|(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)\| = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

b) Siden $x(t) = y(t)$ på C ligger C i planet $x = y$. Videre er

$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 4 \quad , t \in \mathbb{R}$$

så C ligger i tillegg på kulen med centrum i origo og radius 2. Siden C er en lukket kurve må C utgjøre snittet av disse to; altså er C en sirkel. Radius er $r = \frac{1}{\kappa} = 2$ så C er en storsirkel på kula og sentrum ligger i origo.

Kont-eksamen SIF5005 01: oppgave 5: Vi ser på grensenverdien av f når (x, y) nærmer seg origo langs x-aksen:

$$\lim_{t \to 0} f(t, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{t^4 - t^2 0^2}{t^4 + 0^4} = 1 \neq f(0, 0)$$

så f er ikke kontinuerlig i 0. M.h.p de partiellderiverte ser vi på differenskvotientene i $(0, 0)$

$$f_1(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

som opplagt ikke eksisterer. Derimot

$$f_2(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^5} = 0$$

så f_2 eksisterer i 0.

Oppgave 12.4.1

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2(1+y^2) = \frac{\partial}{\partial x} 2x(1+y^2) = 2(1+y^2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} x^2(1+y^2) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} x^2(1+y^2) = \frac{\partial}{\partial x} 2x^2 y = 4xy$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} x^2(1+y^2) = \frac{\partial}{\partial y} 2x^2 y = 2x^2$$

Oppgave 12.4.3 Grunnet symmetri og kontinuitet av de deriverte trenger vi bare beregne $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ samt $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$, resten oppnås ved å stokke rundt på x, y, z.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} x^3 y^3 z^3 = \frac{\partial w}{\partial x} 3x^2 y^3 z^3 = 6xy^3 z^3$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} x^3 y^3 z^3 = \frac{\partial w}{\partial x} x^3 3y^2 z^3 = 9x^2 y^2 z^3$$

Oppgave 12.5.7 En metode er å sette inn uttrykket for u og v og rett og slett beregne $\frac{\partial z}{\partial x}$ direkte

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \arctan \frac{2x+y}{3x-y} \\
&= \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+y}{3x-y}\right)^2} \left(\frac{2}{3x-y} - \frac{3(2x+y)}{(3x-y)^2} \right) \\
&\vdots \\
&= \frac{-5y}{13x^2 - 2xy + 2y^2}
\end{aligned}$$

En annen er å bruke kjerneregelen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{\frac{2}{v}}{1 + \left(\frac{u}{v}\right)^2} - \frac{\frac{3u}{v^2}}{1 + \left(\frac{u}{v}\right)^2} \\
&= \frac{2v - 3u}{v^2 + u^2} = \frac{-5y}{13x^2 - 2xy + 2y^2}
\end{aligned}$$

Oppgave 12.5.17 Vi antar at f har kontinuerlige partiellderiverte

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(f_1(x,y)\frac{\partial x}{\partial t} + f_2(x,y)\frac{\partial y}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(f_1(x,y)\sin s + f_2(x,y)\cos s\right) \\
&= f_1(x,y)\cos s + \left(f_{11}(x,y)\frac{\partial x}{\partial s} + f_{12}(x,y)\frac{\partial y}{\partial s}\right)\sin s \\
&\quad - f_2(x,y)\sin s + \left(f_{21}(x,y)\frac{\partial x}{\partial s} + f_{22}(x,y)\frac{\partial y}{\partial s}\right)\cos s \\
&= f_1(x,y)\cos s + (f_{11}(x,y)t\cos s - f_{12}(x,y)t\sin s)\sin s \\
&\quad - f_2(x,y)\sin s + (f_{21}(x,y)t\cos s - f_{22}(x,y)t\sin s)\cos s
\end{aligned}$$

siden f har kontinuerlige partiellderiverte er $f_{12} = f_{21}$ og ovenstående reduserer til

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = f_1 \cos s - f_2 \sin s + (f_{11} - f_{22})t\cos s \sin s + f_{12}t(\cos^2 s - \sin^2 s)$$