Løsningforslag til Øving 10, MA1103, vår 2007

15.4.22 C er sirkelen med sentrum i origo, radius a og orientert mot klokka.

$$\frac{1}{2\pi} = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}{a^2 cos^2 t + a^2\sin^2 t} dt = 1$$

K er kvadratet med hjørner i $(1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1)$ og orientert med klokka. Integralet langs K splitter da opp i fire deler; en for hver side:

$$\frac{1}{2\pi}\oint_K \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_1^{-1}\frac{dy}{1+y^2} + \int_1^{-1}\frac{dx}{1+x^2} - \int_{-1}^{1}\frac{dy}{1+y^2} - \int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}\right)$$
$$= -\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2} = -\frac{2}{\pi}\arctan t\Big|_{-1}^{1} = -1$$

Kurven i spørsmål c) omslutter ikke origo og ved eksempel 5 i kapittel 15.2 er da

$$\oint \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 0$$

Dette fordi $\mathbb{F}$ er et gradientfelt i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y \leq 0\}$.

15.5.17

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = |\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ e^u\cos v & e^u \sin v & 1 \\ -e^u \sin v & e^u\cos v & 0 \end{vmatrix}| = e^u\sqrt{1+e^{2u}}$$

Vi beregner heretter ladningen på flaten S ved:

$$\iint_S \delta dS = \iint_S \sqrt{1+e^{2u}} dS = \int_0^1\int_0^{\pi} e^u e^{3u} dv du = \frac{\pi}{3}(3e + e^3 - 4)$$

15.6.1 Vi splitter opp i fire deler; en del for hver flate i tetrahedronet.

$$xy - plan : \iint_{xy} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} dS = \iint_{xy} < x,0,0 >< 0,0,-1 > dxdy = 0$$

$$yz - plan : \iint_{yz} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} dS = \iint_{yz} < 0,z,0 >< -1,0,0 > dydz = 0$$

$$xz{-}plan : \iint_{xz} < x,z,0 >< 0,-1,0 > dxdz = \iint_{xz} -z\, dxdz = \int_0^6\int_0^{2-\frac{x}{3}} -z\, dzdx = -4$$

Siste integrael er over flaten som ligger planet $P : x + 2y + 3Z = 6$. Vi projiserer ned i xy-planet og får:

$$dS = \frac{< 1,2,3 > |}{3}$$

15.6.5 Projeksjonen i xy-planet er disken D gitt ved $x^2+y^2 = a-b > 0$, $N = \frac{<2x,2y,1>}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$ og $dS = \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$. Dette gir fluksen

$$\iint_D N\cdot F dS = \iint_D 2(x^2+y^2) - a + x^2 + y^2 dxdy = 2\pi\int_0^{\sqrt{a-b}}(r^2+a)rdr = \frac{\pi}{2}(a-b)(3a-b)$$

16.3.5

$$A = \frac{1}{2}\oint xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3ab\cos^4 t\sin^2 t + 3ab\sin^4 t\cos^2 t)dt = \frac{3\pi ab}{8}$$

Eksamensoppgave 3, desember 2005 Taktikken her er å lukke kurven med linjestykket fra $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ til $\frac{1}{\sqrt{2}}$ på x-aksen. Derved kan vi bruke Greens setning. Til slut regner vi ut linjeintegralet av dette stykket og trekker fra!

$$\int_{C+L}(-y^3+1)dx + (2x^3 + e^{y^2})dy = \iint_D (6x^2 + 3y^2)dxdy = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$$

$$\int_L(-y^3+1)dx + (2x^3 + e^{y^2})dy = \int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dt = \sqrt{2}$$

Og dermed: $I = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} - \sqrt{2}$