Løsningforslag til Øving 8, MA1103, vår 2007

13.3.1 Maksimer x^3y^5 når $x+y=8$: Vi anvender Lagange multiplikatormetode.

$$L(x,y,\lambda) = x^3y^5 - \lambda(x+y-8)$$

Som gir oss ligningssystemet

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2y^5 + \lambda \\ 0 &= 5x^3y^4 + \lambda \\ 0 &= x+y-8 \end{aligned}$$

første og andre ligning gir at $\frac{3y}{5x} = 1$. Setter vi dette inn i tredje ligning får vi:

$$x + \frac{5x}{3} = 8 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 5$$

Og dermed $x^3y^5 = 84375$.

14.4.15

$$\iint_A e^{-x^2}\,dxdy = \int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} dxdy = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} dydx = \int_0^1 xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

14.4.35 Vi finner først avstanden r fra origo til ethvert punkt $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ på linjen $y = 1-x$ som funksjon av θ.

$$y = 1 - x \Rightarrow r\sin\theta = 1 - r\cos\theta \Rightarrow r = \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$$

Dette gir integralet

$$\begin{aligned} I = \iint_T e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}} e^{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}} r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^2 e^{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}} d\theta \end{aligned}$$

En finner lett at $\frac{d}{d\theta}\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \frac{2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$, og dermed:

$$I = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^t dt = \frac{1}{4}(e - \frac{1}{e})$$

En annen metode er variabelbyttet $u = y-x$ og $v = y+x$. Dette gir jacobianten

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -2 \Rightarrow \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$$

Og T avbildes over i trekanten med hjørner i origo, (1,1) og (-1,1). Integralet blir da

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 ve - \frac{v}{e} dv = \frac{1}{4}(e - \frac{1}{e})$$

14.7.1

$$dS = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dxdy = \sqrt{1+4+4} dxdy$$

Integrerer vi får vi:

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r dr d\theta = 6\pi \int_0^1 r dr = 3\pi$$

14.7.10 $z_1 = 2xy$ og $z_2 = x^2 + y^2$ er to flater i $\mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\partial z_2}{\partial y} = 2y \quad , \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{\partial z_2}{\partial x} = 2x$$

Men da er $dS_1 = dS_2$ og flatene har samme areal over samme områder i xy-planet.

14.7.18 Den totale massen av terningen er:

$$m = \iiint_T \delta(x,y,z) dV = \int_0^a \int_0^a \int_0^a x^2 + y^2 + z^2 dxdydz = a^5$$

Ved symmetri er massemidtpunktets koordinator like så vi beregner bare x-koordinaten $\bar{x}$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{1}{a^5} \iiint_T x\delta dV \\ &= \frac{1}{a^5} \int_0^a \int_0^a \int_0^a x^3 + xy^2 + xz^2 dxdydz = \cdots = \frac{7a}{12} \end{aligned}$$

Eksamensoppgaven

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \ln(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

En ser direkte at nivåkurven $f(x,y) = 0$ er lik unionen av y-aksen og enhetssirkelen. Videre ser vi at f er positiv utenfor enhetsdisken og negativ innenfor. M.h.p. kritiske punkt ser vi at når $(x,y) \neq (0,0)$ er

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^3}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2yx^2}{x^2+y^2}$$

Videre ser vi lett at f har partiellderiverte i $(0,0)$ begge lik 0. Hele y aksen består av kritiske punkter, og $(0,1)$ og $(0,-1)$ må være salpunkt på grunn av fortegnsfordelingen til f. Videre, siden $f(x,y) = 0$ på y-aksen må delen av y-aksen der $|y| < 1$ være lokale maksimum og delen der $|y| > 1$ må være lokale minimum.

Dersom $x \neq 0$ må $y = 0$ og $2x\ln(x^2) + 2x = 0$. Dette gir punktene $(\frac{\pm 1}{\sqrt{e}}, 0)$. Disse må være minimumspunkter fordi f er deriverbar i hele enhetsdisken, null på randen og f er symmetrisk rundt y-aksen. Ekstremalverdien av f på annulussen $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ må antas på den ytre rand, så vi parametriserer denne ved $(4\cos\theta, 4\sin\theta)$ der $0 \leq \theta < 2\pi$.

$$f(\theta) = 4\ln 4\cos^2\theta \Rightarrow f_{\max} = f(0) = f(\pi) = 4\ln 4$$

Vi finner til slut volumet av legemet begrenset av grafen for f og xy-planet.

$$V = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\ln(r^2)drd\theta = -(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta)(\int_0^1 2r^3\ln r dr) = \frac{3\pi}{4}$$