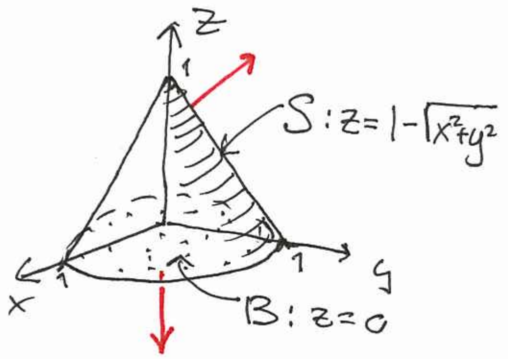
#15.6.4

Vi skal finne fluksen av $\mathbb{F} = \langle y, 0, z \rangle$ ut gjennom overflata O av den kompakte kjegla $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}$.

S består av to deler



- B(unn): $z = 0$; $x^2+y^2 \leq 1$
- S(ideflate): $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$; $x^2+y^2 \leq 1$

Vi skal altså finne

$$\iint_O \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iint_B \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS + \iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS$$

- Her er det lett å se at det første integralet blir 0 da $\hat{\mathbb{N}} = -\hat{\mathbb{k}}$ og $\mathbb{F} = \langle y, 0, 0 \rangle$ på B, $\therefore \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} = 0$.

- For det andre integralet har vi $\mathbb{n} = \pm \langle z_x, z_y, -1 \rangle$ der vi må velge $-$tegnet siden $\hat{\mathbb{N}}$ skal ha positiv z-komponent. Videre er $dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dA$.

Har $z_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ slik at

$\hat{\mathbb{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right\rangle$ da $\left| \left\langle \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right\rangle \right| = \sqrt{2}$, og

HEVER SEG MOT HVERANDRE SLIK DE SKAL

$dS = \sqrt{2}\, dA$. Altså

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left\langle y, 0, 1 - \sqrt{x^2+y^2} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right\rangle dA$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\overset{①}{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}} + \overset{②}{1} - \sqrt{x^2+y^2} \right) dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r\cos\theta\sin\theta + 1 - r \right) r\, dr\, d\theta$$

Alt. ① blir 0 ved symmetri
② $\pi \cdot 1^2$ (Areal)

$$= \frac{1}{3 \cdot 2} \sin^2\theta \Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \cdot 2\pi - 2\pi \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \iint_O \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = 0 + \frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$$