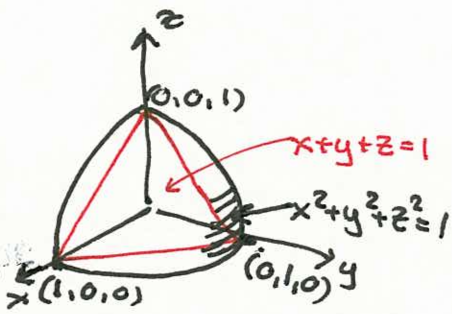
LØSNINGER/TIPS NOEN OPPG. ØVING 2



#11.3.12 Ved symmetri må sentrum i sirkelen C ha koordinater $x=y=z$ og ligge i planet $x+y+z=1$, dvs. sentrum $\mathbf{r}_0 = \underline{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$.

Sirkelen C går gjennom $(1,0,0)$ (og $(0,1,0)$ så vel som $(0,0,1)$). Altså er

$$r = \sqrt{\left(\tfrac{1}{3}-1\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}-0\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}-0\right)^2} = \underline{\sqrt{\tfrac{2}{3}}}$$

Alle vektorer $\mathbf{v}$ slik at $\mathbf{v} \cdot \langle 1,1,1 \rangle = 0$ er parallelle med planet $x+y+z=1$. Én slik vektor er $\mathbf{v}_1 = \langle 1,-1,0 \rangle$, en annen og $\perp \mathbf{v}_1$ er vektoren $\mathbf{v}_1 \times \langle 1,1,1 \rangle =$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \langle -1,-1,2 \rangle.$$ Velger $\mathbf{v}_2 = \langle 1,1,-2 \rangle$ og

har enhetsvektorene $\underline{\hat{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1,-1,0 \rangle,\ \hat{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\langle 1,1,-2 \rangle}$.

Med disse dataene har vi følgende mulige parametrisering:

$$\underline{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(\cos t\, \hat{\mathbf{v}}_1 + \sin t\, \hat{\mathbf{v}}_2\right),\quad t \in [0, 2\pi]}.$$

#11.3.13 $L = \int_0^1 t\sqrt{8+9t^2}\,dt$. Innfør $u = 8+9t^2$ ☺

#11.3.19 $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2t}+1}\,dt$. Prøver $2e^{2t}+1 = v^2$:

Rasj. fu. grad teller ≥ grad nevner

DELBRØK-OPPSPALT!

$$\int \sqrt{2e^{2t}+1}\,dt = \int \boxed{\frac{v^2\,dv}{v^2-1}} = \int \left(1 + \frac{1}{v^2-1}\right)dv = \dots$$

#11.3.24 $\underline{s} = \int_0^t \sqrt{e^{2\tau}+2+e^{-2\tau}}\,d\tau = \int_0^t (e^{\tau}+e^{-\tau})\,d\tau = \underline{e^t - e^{-t}}$

MERK: KVADRAT!

Hvordan løse ut t? Kan f.eks. gjøres slik

$$e^t - e^{-t} = s$$
$$(e^t - e^{-t})e^t = se^t$$
$$(e^t)^2 - se^t - 1 = 0 \quad \text{Annengradsligning i } x = e^t$$
$$e^t = \frac{s \pm \sqrt{s^2+4}}{2}$$

$e^t > 0$, så $-$-tegn må forkastes, og vi har

$$t = \ln \frac{s + \sqrt{s^2+4}}{2}.$$

#11.4.5 At krumningen $\kappa(s) = 0$ for alle s betyr at $\left|\frac{d\hat{\mathbb{T}}}{ds}\right| = 0$ for alle s hvilket betyr at $\frac{d\hat{\mathbb{T}}}{ds} = \mathbb{0}$ for alle s, dvs. $\hat{\mathbb{T}}(s) = \mathbb{k}$. Da $\hat{\mathbb{T}}(s) = \frac{d\mathbb{r}}{ds}$ har vi altså $\frac{d\mathbb{r}}{ds} = \mathbb{k}$ eller

$$\mathbb{r} = \mathbb{k}s + \mathbb{C}$$

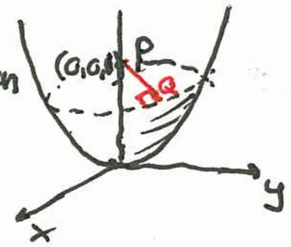
som er ligningen for en rett linje!

(Når $\mathbb{k} \neq \mathbb{0}$, som er et utgangspunkt her: Krumning er definert v.hj.a. <u>enhetstangentvektoren</u> $\hat{\mathbb{T}}(s)$.)

LØSNINGER TO OPPGAVER ØVING 4

#12.3.35 (Her løser vi oppgaven ved en geometrisk metode introdusert i Example 8. I maks-min teorien får vi andre framgangsmåter!)

Dersom $Q(x_0, y_0, z_0)$ er punktet på flata $z = x^2 + 2y^2$ slik at avstanden fra $P(0,0,1)$ til Q er kortest, må PQ stå normalt på flata. Altså:



Flatenormal i $Q \parallel QP$

$$\langle 2x_0, 4y_0, -1\rangle \parallel \langle x_0, y_0, z_0 - 1\rangle$$

eller

$$2x_0 = t x_0 \Leftrightarrow (2-t)x_0 = 0 \qquad (1)$$
$$4y_0 = t y_0 \Leftrightarrow (4-t)y_0 = 0 \qquad (2)$$
$$-1 = t(z_0 - 1) \qquad (3)$$

der $t \in \mathbb{R}$.

Dersom $x_0 \neq 0$, er $t = 2$ og $y_0 = 0$, $z_0 = \frac{1}{2}$ hvilket gir $x_0^2 = \frac{1}{2}$. $|Q_0P| = \sqrt{1/2 + 1/4} = \sqrt{3}/2$

Dersom $y_0 \neq 0$, er $t = 4$ og $x_0 = 0$, $z_0 = \frac{3}{4}$ hvilket gir $y_0^2 = \frac{3}{8}$. $|Q_0P| = \sqrt{3/8 + 1/16} = \sqrt{7}/4$

Dersom $x_0 = y_0 = 0$, er $z_0 = 0$ og $|Q_0P| = 1$.

Da $\sqrt{7}/4 < \sqrt{3}\cdot 2/_{2\cdot 2} < 1$ er de(t) nærmeste punkt til $(0,0,1)$ på $z = x^2 + 2y^2$ $\left(0, \pm\sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{3}{4}\right)$.

Avstanden er $\sqrt{7}/4$.

#12.5.17 Vi skal finne $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(x,y)$ når $x = t \sin s$ og $y = t \cos s$. (Antar at f har kont. part. deriverte av 2. orden)

Vi finner først $\frac{\partial f}{\partial t}$ ved å bruke kjerneregelen:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \sin s \frac{\partial f}{\partial x} + \cos s \frac{\partial f}{\partial y}.$$

I neste omgang partiellderiverer vi dette uttrykket mhp s. I tillegg til sum- og produktregel bruker vi kjerneregelen på $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$, dvs. $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}$. Altså

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}} = \cos s \frac{\partial f}{\partial x} + \sin s\left(t \cos s \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - t \sin s \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$$
$$- \sin s \frac{\partial f}{\partial y} + \cos s\left(t \cos s \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - t \sin s \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$\boxed{= \cos s \frac{\partial f}{\partial x} - \sin s \frac{\partial f}{\partial y} + t \sin s \cos s\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + t(\cos^2 s - \sin^2 s)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}$$

LØSNINGER TO OPPGAVER 6.ØVING

#13.1.22 Vi skal finne minimum av $f(x,y) = x + 8y + \frac{1}{xy}$ i første kvadrant $x>0$, $y>0$.

Finner først kritiske punkt:

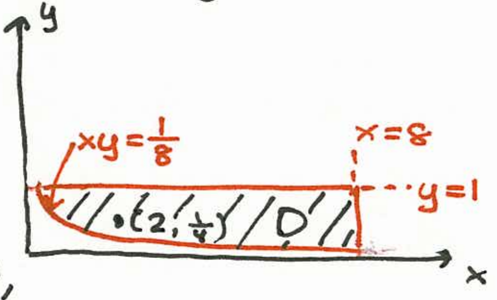
$$f_x = 1 - \frac{1}{x^2y} = 0 \Leftrightarrow x^2y = 1 \Leftrightarrow y = x^{-2} \quad (i)$$
$$f_y = 8 - \frac{1}{xy^2} = 0 \Leftrightarrow xy^2 = \frac{1}{8} \quad (ii)$$

(i) innsatt i (ii): $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \underline{x = 2}$ som gir $\underline{y = \frac{1}{4}}$ ved (i)
(Kontrollerer at $(2, 1/4)$ passer i (i) og (ii).)

$f(2, \frac{1}{4}) = \underline{\underline{6}}$ som er et globalt minimum da $f(x,y) \to \infty$ når x eller $y \to \infty$ eller $xy \to 0$

Kommentar: Er vi fornøyd med denne begrunnelsen? Boka går litt nærmere inn på en forklaring i siste avsnitt under Example 8.

I vårt tilfelle kan vi se på $f(x,y)$ på et lukket begrenset område D, f.eks. begrenset av $x = 8$, $y = 1$, $xy = \frac{1}{8}$.
Da $f(x,y) = x + 8y + \frac{1}{xy}$, er $f > 8$ på randa til D.



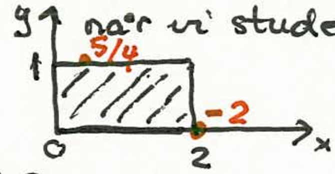
Da f har et minimum på D, der kandidatene er $(2, 1/4)$ og randpunktene, er $f(2, 1/4) = 6$ minimum på D. Siden $f > 8$ for $x, y > 0$ utafor D, er 6 minimum i $x, y > 0$ også.

#13.2.1 Vi skal finne maksimum og minimum for $f(x,y) = x - x^2 + y^2$ på rektanglet $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$.

Da vi har en kontinuerlig funksjon på et lukket begrenset område, vet vi at den har såvel maksimum som minimum! Kandidater: Kritiske punkt i det indre og randpunktene.

Kritiske punkt:

Da $f_x = 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ og $f_y = 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$, har ikke f noe kritiske punkt i det indre. (En annen sak er at $(\frac{1}{2}, 0)$ kommer med når vi studerer randa.)



Randa:

$y = 0$: $F(x) = f(x,0) = x - x^2$; $0 \le x \le 2$

$F'(x) = 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, $F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$F(0) = 0$, $F(2) = -2$ minst så langt

$y = 1$: $G(x) = f(x,1) = F(x) + 1$, $G(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ størst så langt

$x = 0$: $H(y) = f(0,y) = y^2$; $0 \le y \le 1$

H vokser fra 0 til 1.

$x = 2$: $I(y) = f(2,y) = 2 - 2^2 + y^2 = H(y) - 2$

I vokser fra -2 til -1.

KONKLUSJON: f har største verdi lik $5/4$ og minste verdi lik -2. Disse verdiene oppnås i hhv $(\frac{1}{2}, 1)$ og $(0, -2)$.

Kommentar: Her har vi en systematisk framgangsmåte! (Men den kan bli noe arbeidskrevende når randa er sammensatt.)