LØSNINGSFORSLAG MA 1103
Eksamen 04.06.07

Med vanlige forbehold om skrivefeil! ESH.

Oppgave 1

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

Grensen når $(x,y)\to(0,0)$ eksisterer ikke.

Bmk Vi kunne også innført $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ og undersøkt om vi har en grense når $r\to 0$ (uavhengig av θ).

Oppgave 2

$f = x^5y + xy^5 + xy$. Kritisk punkt når

i) $f_x = 5x^4y + y^5 + y = 0 \Leftrightarrow y(5x^4+y^4+1)=0 \Leftrightarrow y=0$ da $5x^4+y^4+1 \geq 1$.

ii) $f_y = x^5 + 5xy^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(5y^4+x^4+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ på tilsvarende måte.

Altså: (x,y) kritisk punkt $\Leftrightarrow$ $x=0,\ y=0$

$(0,0)$ er et sadelpunkt da $f > 0 = f(0,0)$ når x,y forskj. fra 0 har samme tegn, mens $f<0$ når x,y forskjellig fra 0 har motsatt tegn.

Bmk. At $(0,0)$ er et sadelpunkt kan også begrunnes v.hj.a 2.derivert testen.

Oppgave 3

f har såvel maksimum som mininum på sirkelen $x^2+y^2=9$ da dette er en lukket begrenset mengde (og f er en kont. funksjon).

Vi kan finne kandidatene for ekstremalpunktene v. hj. a. Lagranges multiplikator-metode:

$$x^3 y \text{ skal } \begin{cases}\text{maksimeres}\\ \text{minimeres}\end{cases} \text{ på } x^2+y^2=9$$

$$\begin{cases} \langle 3x^2y,\, x^3\rangle = 2\lambda \langle x, y\rangle & (i)\\ x^2+y^2=9 & (ii)\end{cases}$$

Vi er ikke interessert i $x=0$ eller $y=0$, og må ha $\dfrac{3x^2y}{x} = \dfrac{x^3}{y} \iff \underline{3y^2=x^2}$

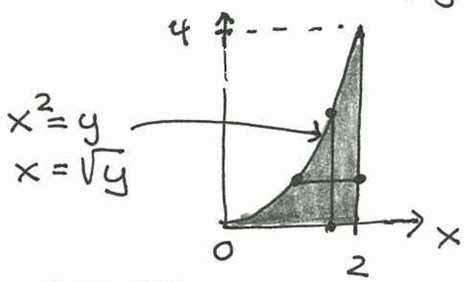
som innsatt i (ii) gir $4y^2=9 \iff \underline{y=\pm\frac{3}{2}}$

$$\underline{f_{max}} = \frac{3^3\cdot 3\sqrt{3}}{2^3}\cdot\frac{3}{2} = \underline{\frac{3^5}{2^4}\sqrt{3} = \frac{243}{16}\sqrt{3}}$$

$$\underline{f_{min} = -f_{max}}$$

Bmk Vi kunne også brukt substitusjon, dvs. studert $\pm x^3\sqrt{9-x^2}$, $-3\le x\le 3$, eller parametrisert v. hj. a. θ, dvs $x=3\cos\theta$, $y=3\sin\theta$.

Oppgave 4

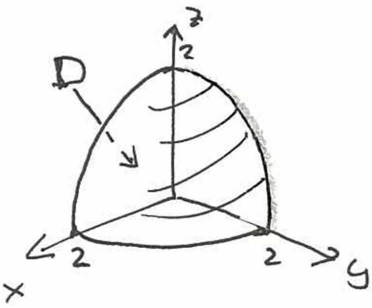


$$\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{1+x^3}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2\int_0^{x^2}\sqrt{1+x^3}\,dy\,dx = \frac{1}{3}\int_0^2 3x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(1+x^3)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{2}{9}(3^3-1) = \underline{\frac{52}{9}}$$

Oppgave 5



$$I = \iiint_D 2z\, dV$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2} 2\rho\cos\phi \; \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$
$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2} = \underline{2\pi}$$

Bmk Her brukte vi kulekoordinater. Velger vi sylinderkoordinater har vi

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2} \left(\int_0^{\sqrt{4-r^2}} 2z \, dz \right) r\, dr\, d\theta .$$

Oppgave 6

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2t^{3/2}, \cos(3t), \sin(3t) \rangle \;;\; 0 \le t \le 3$$
$$\mathbf{r}'(t) = \langle 3t^{1/2}, -3\sin(3t), 3\cos(3t) \rangle$$

Altså blir

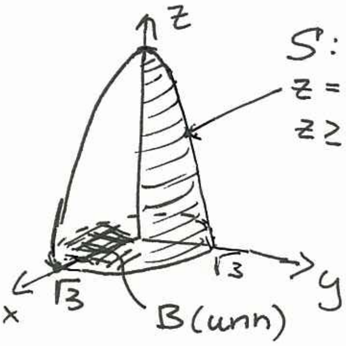
$$\underline{L} = \int_0^3 |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_0^3 \sqrt{9t + 9(\sin^2 3t + \cos^2 3t)}\, dt$$
$$= \int_0^3 3\sqrt{t+1}\, dt = 3 \cdot \frac{2}{3}(t+1)^{3/2}\Big]_0^3$$
$$= 2(2^3 - 1) = \underline{14}$$

Oppgave 7

Må ha $\phi = x^2 y + k(y)$ og $\phi_y = x^2 + \underline{k'(y)} = x^2 + \underline{y}$

$\underline{\phi = x^2 y + \frac{y^2}{2}}$ er en potensialfunksjon slik at $\nabla \phi = \mathbb{F}$. Da er $\underline{\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}} = \phi(0,-3) - \phi(1,1)$
$= 9/2 - 3/2 = \underline{3}.$

Oppgave 8



$$\boxed{\iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS} = \iint_S (2x^2+2y^2-z)\frac{1}{|\mathbb{n}|}\,dS$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{n} = \langle 2x, 2y, 1\rangle \\ \mathbb{F} = \langle x, y, -z\rangle\end{array}}$$

$$= \iint_{\bigcirc\sqrt{3}} (2x^2+2y^2-3+x^2+y^2)\,dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (3r^2-3)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi\cdot 3\left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^2}{2}\right)\Big|_{r^2=0}^{r^2=3} = \boxed{\frac{9\pi}{2}}$$

Bmk Vi kunne også brukt divergensteoremet:

$\operatorname{div} F = \nabla\cdot\mathbb{F} = 1+1-1 = \underline{1}$, $D = \{0 \le z \le 3-x^2-y^2\}$

$$\iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS \underset{DT}{=} \operatorname{Vol}(D) - \underbrace{\iint_B \mathbb{F}\cdot(-\mathbb{k})\,dS}_{0 \text{ da } z=0}.$$

Oppgave 9

$\mathbb{F} = \langle x+yz, y+xz, z+xy\rangle$, $\nabla\cdot\mathbb{F} = 1+1+1 = \underline{3}$

I flg divergensteoremet har vi da

$$\boxed{\oiint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = \iiint_E 3\,dV = 3\operatorname{Vol}(E) = 3\cdot 1 = 3}$$

Oppgave 10

Vet: (*) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Å vise: $\oint_C \dfrac{\partial f}{\partial x}\,dy = \oint_C \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dx$ for alle s. glatte, lukkede C

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial x}dy - \frac{\partial f}{\partial y}dx \underset{\text{Green}}{=} \iint_R \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{-\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dA \underset{(*)}{=} \iint_R 0\,dA = \underline{0}.$$

Men $\oint_C \dfrac{\partial f}{\partial x}dy - \dfrac{\partial f}{\partial y}dx = 0 \iff \oint_C \dfrac{\partial f}{\partial x}dy = \oint_C \dfrac{\partial f}{\partial y}dx$; FRAMME! $\square$