2004

LØSNINGSFORSLAG MIDTSEMESTERPRØVE

Oppgave 1

Alternativ b); likningssettet $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

beskriver ei linje i $\mathbb{R}^3$
(skjæringslinja mellom dei to planene
$x = 2$ og $y = 2$)

Oppgave 2

Alternativ c); hvis f er differensierbar i punktet (a,b), så er f kontinuerlig i (a,b).

Oppgave 3

Alternativ c); $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} = 2$

(Kan se dette ved f.eks å gå over til polar-koordinater; $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ og så evaluere grenseverdien når $r \to 0$.

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta + 2r^2}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta + 2$$

$$= 2$$)

Oppgave 4

$f(x,y) = 6xy - 2x^3 - 3y^4 + 16$

For å avgjøre i hvilken retning ut fra punktet $(1, \frac{1}{2}, f(1, \frac{1}{2}))$ en person må bevege seg for å komme fortest mulig ned, finner vi først gradientvektoren svarende til $(1, \frac{1}{2})$:

$$\nabla f(x,y) = [6y - 6x^2, \ 6x - 12y^3]$$

$$\nabla f(1, \tfrac{1}{2}) = [3 - 6, \ 6 - \tfrac{12}{8}] = [-3, \ \tfrac{9}{2}]$$

Gradientvektoren angir den retningen hvor funksjonen øker mest, mens $-\nabla f(1, \frac{1}{2})$ angir den retningen hvor funksjonen minker mest ut fra $(1, \frac{1}{2})$.

Personen bør bevege seg i retning $[+3, -\frac{9}{2}]$

Oppgave 5

$\underline{r}(t) = [2t, t^2, \ln(t)]$, $t > 0$

Skal finne buelengden mellom punkten $(2,1,0)$ og $(4,4,\ln 2)$. Ser at dette svarer til buelengden fra $t=1$ til $t=2$

Har: $s = \int_1^2 \left|\frac{dr}{dt}\right|$

$$\frac{dr}{dt} = [2, 2t, \tfrac{1}{t}]$$

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}} = \sqrt{\frac{4t^2+4t^4+1}{t^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2t^2+1)^2}{t^2}} = \frac{2t^2+1}{t} = 2t + \frac{1}{t}$$

Dermed:

$$s = \int_1^2 \left|\frac{dr}{dt}\right| dt = \int_1^2 2t + \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \Big[t^2 + \ln|t|\Big]_1^2 = (4+\ln 2) - (1 + \ln 1) = \underline{\underline{3+\ln 2}}$$

Oppgave 6

$f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$

a) Kritiske punkt: $\nabla f(x,y) = 0$:

$$\nabla f(x,y) = \left[\frac{2x}{x^2+y^2+1} , \frac{2y}{x^2+y^2+1} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{x^2+y^2+1} = 0 \wedge \frac{2y}{x^2+y^2+1} = 0$$

$$\underline{x = 0} \wedge \underline{y = 0}$$

$\Rightarrow$ (0,0) er eneste kritiske punkt

b) Kan se ut fra funksjonen at utenfor punktet (0,0) vil vi få høyere funksjonsverdi enn i (0,0), så (0,0) er et (globalt) minimumspunkt.

Vi kan også studere Hessianmatrisen i (0,0):

Finner $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2+1)-4x^2}{(x^2+y^2+1)^2}$, $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = 2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2+1)-4y^2}{(x^2+y^2+1)^2} \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2} \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = 0$$

Dermed: $H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

$\det H(0,0) = 4 > 0$, øverste venstre element: $2 > 0$

$\Rightarrow$ (0,0) er et (lokalt) minimumspunkt

c) Skal finne max og min verdi for f på det elliptiske området $x^2+4y^2 \leq 1$

Vet at $(0,0)$ ligger innenfor området og er et minimumspunkt. Det er mange måter å finne maksimumsverdien på:

1) Av funksjonsuttrykket ser vi at største verdi oppnås i punkter lengst fra origo. De punktene på ellipsen lengst fra origo er $(1,0)$ og $(-1,0)$. Dermed blir maks-verdien $f(1,0)=f(-1,0) = \ln 2$.

2) Vi kan parametrisere randen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\theta \\ y &= \tfrac{1}{2}\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad \left(\text{gir } x^2+4y^2 = \cos^2\theta + 4\left(\tfrac{1}{4}\sin^2\theta\right) = \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1\right)$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

Setter inn i funksjonen:

$$g(\theta) = f(\cos\theta, \tfrac{1}{2}\sin\theta) = \ln(\cos^2\theta + \tfrac{1}{4}\sin^2\theta + 1)$$

Dette gir en en-variabel funksjon. Kan derivere denne for å finne maksimumspunktet. (på intervallet $0 \leq \theta \leq 2\pi$)

3) Vi kan bruke Lagrange:

Maks av $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$ gitt at $x^2+4y^2=1$:

Gir (1) $\dfrac{2x}{x^2+y^2+1} = \lambda\, 2x$

(2) $\dfrac{2y}{x^2+y^2+1} = \lambda\, 8y$

(3) $x^2+4y^2 = 1$

(1) : $x \neq 0$: $\lambda = \frac{1}{x^2+y^2+1}$

innsatt i (2): $2y = 8y$

$\underline{y = 0}$, innsatt i (3): $\underline{x = \pm 1}$

(1) $\underline{x = 0}$: , innsatt i (3) : $\underline{y = \pm \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ Må teste verdier i følgende punkter:

$(1, 0)$: $f(1,0) = \ln 2$

$(-1, 0)$: $f(-1,0) = \ln 2$

$(0, 1/2)$: $f(0, 1/2) = \ln(5/4)$

$(0, -1/2)$: $f(0, -1/2) = \ln(5/4)$

$\Rightarrow$ maksverdi: $\underline{\underline{\ln 2}}$

4) Bruke randbetingelsen direkte: $x^2 + 4y^2 = 1$

$\underline{x^2 = 1 - 4y^2}$

(merk at vi får $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ for å gi mening!)

$g(y) = \ln((1-4y^2) + y^2 + 1) = \ln(2 - 3y^2)$

$g'(y) = \frac{-6y}{2-3y^2} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad (\Rightarrow x = \pm 1)$

$\Rightarrow$ Må teste verdier i følgende punkt:

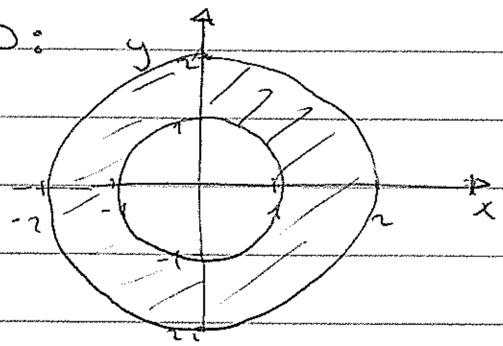
$(\pm 1, 0)$

$(0, \pm 1/2)$.

Oppgave 7

a) Ulikheter $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 \\ x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$ gir området

D:



b) $$\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \ln(r^2)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_1^2 r\cdot \ln r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(\left[\tfrac{1}{2}r^2\ln r\right]_1^2 - \int_1^2 \tfrac{1}{2}r^2\cdot\tfrac{1}{r}\,dr\right)d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(2\ln 2 - \left[\tfrac{1}{4}r^2\right]_1^2\right)d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} 2\ln 2 - \tfrac{3}{4}\,d\theta = 2\pi\left(4\ln 2 - \tfrac{3}{2}\right)$$

$$= \underline{\underline{\pi(8\ln 2 - 3)}}$$