Manus til forelesningen 2. mai *)

REPETERER OG REGNER**) PÅ STOFFET ~~ETTER~~ MSP

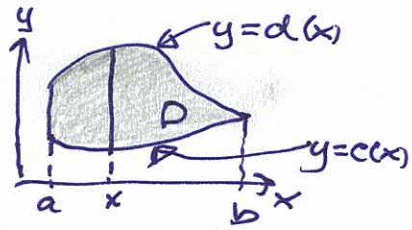
<u>Dobbeltintegral</u>

<u>Definisjonen</u>

<u>Teorem 2</u> (Utregning ved iterert integrasjon)

D : $c(x) \le y \le d(x)$; $a \le x \le b$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \Big[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\Big]\,dx$$



Tilsvarende utregning for standard-område over y-aksen. Funksjonene som inngår kontinuerlige

<u>#1 s. 804</u> (Vær OBS på Chapter Review)

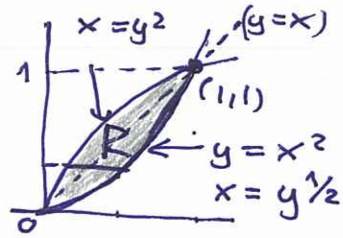
$$I = \iint_R (x+y)\,dA = 2\iint_R x\,dA = 2\iint_R y\,dA \text{ ved symmetri!}$$

Kontroll: Regn ut $\iint_R (x+y)\,dA$ direkte.

$$I = 2\iint_R y\,dA = 2\int_0^1 y\Big[\int_{y^2}^{y^{1/2}} dx\Big]dy$$

$$= 2\int_0^1 (y^{3/2} - y^3)\,dy$$

$$= 2\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{3}{10}}}$$



<u>Polarkoordinater. Variabelskifte generelt.</u>

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

$$dA = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv = \left|\,\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\,\right| du\,dv$$

$x = x(u,v)$
$y = y(u,v)$
$(z=0)$

---

*) Som vanlig ble det ikke tid til å gjennomgå alt!
**) Bruker oppgaver fra „kontene".

Oppgave 5, Eks. des. 2005

Regnet på forelesningen 28.03. Dette er Ex8. s. 779 bortsett fra at $x = 3y^2$ er erstattet av $x = 4y^2$.

Flateintegral

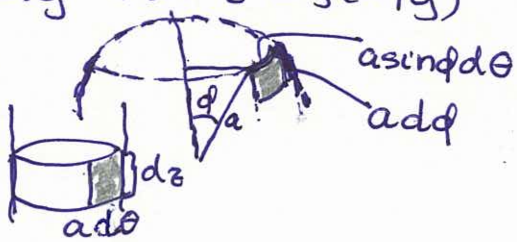
$$dS = \left|\frac{\partial \vec r}{\partial u} \times \frac{\partial \vec r}{\partial v}\right| du\,dv \quad \text{der } x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$$

Spesialtilfeller:

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy \quad \text{når } z = f(x,y)$$

$$dS = a^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

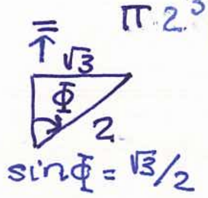
$$dS = a\,d\theta\,dz$$



Oppg 3, des 2006. Se a) b) under trippelintegral!

c) $$M = \iint_S z\,dS = \int_0^{2\pi}\int_{\Phi}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\phi\; 2^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= \pi\, 2^3 \sin^2\phi \Big]_{\Phi}^{\frac{\pi}{2}} = \pi\, 2^3\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \underline{\underline{2\pi}}\ (\text{mg})$$



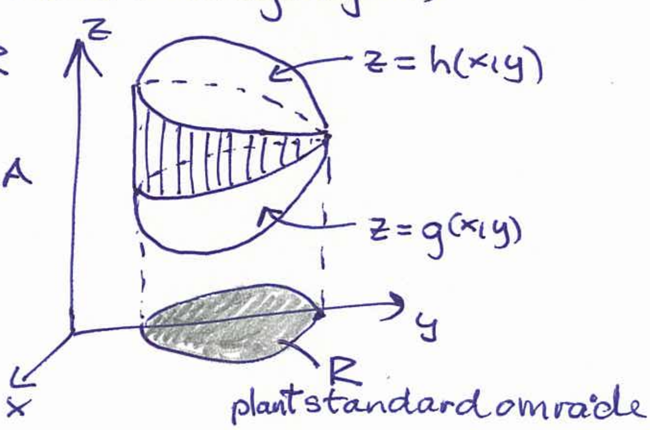
Trippelintegral

Definisjon

"Teorem 2" (Utregning ved iterert integrasjon)

$D:\ g(x,y) \le z \le h(x,y);\ (x,y) \in R$

$$\Rightarrow \iiint_D f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$$



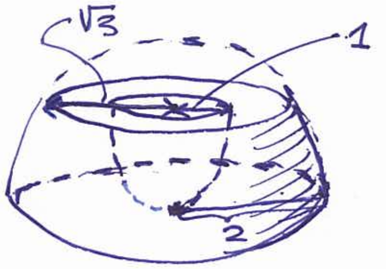
Tilsvarende utregning når D er standardområde over yz-planet eller zx-planet.

Funksjonene som inngår er kontinuerlige.

Sylinderkoordinater. Kulekoordinater (Var. skifte generelt).

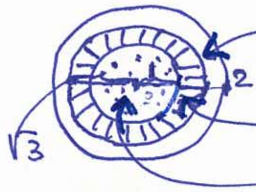
Oppg. 3 des. 2006

a) R avgrenset av i) $x^2+y^2+z^2=4$, ii) $z=x^2+y^2$, $z=0$ og $z=1$.



$$z=1 \Rightarrow \begin{cases} \text{i)}\ x^2+y^2=3 \\ \text{ii)}\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

b) Hvis vi skal beregne volumet som standardområde over xy-planet, må vi dele opp i tre:



Her er $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ ①

Her er $z=1$ ②

Her er $z=x^2+y^2$ ③

$$V_{①}=\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^{2}\sqrt{4-\underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}}\,r\,dr\,d\theta = -\frac{2\pi}{3}(4-r^2)^{3/2}\Big]_{r^2=3}^{r^2=4} = \frac{2}{3}\pi$$

$$V_{②} = \pi(\sqrt{3}^2-1^2) = 2\pi$$

$$V_{③} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Tilsammen $\underline{\underline{V=\frac{19\pi}{6}}}$

Alternativt og enklere: Skivemetoden med skiver vinkelrett på z-aksen. Skivene er ringer (annuli) med

$$R^2 = x^2+y^2 = 4-z^2$$
$$r^2 = x^2+y^2 = z$$

slik at

$$V=\int_0^1 \pi(4-z^2-z)\,dz = \pi\left[4z-\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{19\pi}{6}}}$$

Vektorfelt (GLATTE der definert!)

grad f	div $\mathbb{F}$	curl $\mathbb{F}$	$\nabla \times \nabla f = \mathbb{0}$
∇f	$\nabla \cdot \mathbb{F}$	$\nabla \times \mathbb{F}$	$\nabla \cdot \nabla \times \mathbb{F} = 0$

Oppg. 5, des. 06
Se Ex 1, s. 862. Vi har ikke hatt akkurat denne oppgavetypen på øving.

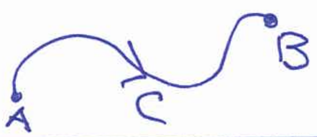
Vektorfelt og linjeintegral

Utgangspunkt

$$\int_C f(x,y,z)\, ds \underset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,|\mathbb{r}'(t)|\, dt$$

når C er gitt ved $\mathbb{r} = \mathbb{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$; $a \le t \le b$.

$$\boxed{\int_C \nabla f \cdot d\mathbb{r} = f(B) - f(A) \text{ når } C \text{ starter i } A \text{ og ender i } B}$$



Følgende er ekvivalent
- i) $\mathbb{F}$ gradientfelt / konservativt felt
- ii) $\int_A^B \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ „uavhengig av vegen"
- iii) $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = 0$ for alle lukkede kurver
- iv) curl $\mathbb{F} = \mathbb{0}$

For at curl $\mathbb{F} = \mathbb{0}$ skal være <u>tilstrekkelig</u> for å slutte at $\mathbb{F}$ er et gradientfelt, må $\mathbb{F}$ være definert (og glatt) i et „enkelt-sammenhengende område", se s. 829. Dette følger av Stokes:  $\underbrace{\iint_S \text{curl}\,\mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}}_{0}$ $= \oint_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ iii).

Oppg. 4, des. 2005

$\mathbb{F} = \langle e^x + xe^x, z\cos y, \sin y \rangle$ slik at

$$\text{curl } \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x + xe^x & z\cos y & \sin y \end{vmatrix} = \underline{\langle 0,0,0 \rangle}$$

Siden $\mathbb{F}$ er et glatt felt i $\mathbb{R}^3$, vet vi da at $\mathbb{F}$ er et konservativt felt. Dermed kan vi f. eks. bruke $\gamma_0 : \mathbb{r} = t\langle 1, \frac{\pi}{2}, 2\rangle$, $0 \le t \le 1$, når vi skal beregne $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{T}}\, ds = \int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$.

$$\int_{\gamma_0} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_{\gamma_0} e^x + xe^x dx + z\cos y dy + \sin y dz = \int_0^1 (e^t + te^t + 1 \cdot 2)dt$$

$$= \underline{\underline{e + 2}}$$

Alternativt

bestemmer vi en potensialfunksjon ϕ:

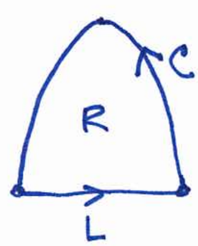
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= e^x + xe^x \Leftrightarrow \phi = xe^x + k_1(y,z) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= z\cos y \Leftrightarrow \phi = z\sin y + k_2(x,z) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \sin y \Leftrightarrow \phi = z\sin y + k_3(x,y) \end{aligned}\right\} \underline{\phi = xe^x + z\sin y} \text{ passer.}$$

Vi har at $\mathbb{F} = \nabla \phi$, og

$$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{T}}\, ds = \int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \phi(1, \tfrac{\pi}{2}, 2) - \phi(0,0,0) = \underline{\underline{e + 2}}$$

Green / Stokes

Oppg. 3, des. 2005



b) $C: \left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le \pi$

$L: \quad x = s, \; y = 0; \; -\frac{1}{\sqrt{2}} \le s \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

Lar vi $\boxed{J} = \int_L (-y^3+1)\,dx + (2x^3+e^{y^2})\,dy = \int_{-\frac{1}{\sqrt2}}^{\frac{1}{\sqrt2}} ds = \frac{2}{\sqrt2} = \boxed{\sqrt2}$

har vi ved Green

$$\boxed{I + J} = 3 \iint_R (2x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$\overset{\tilde{x} = \sqrt2 x}{=} \quad 3/\sqrt2 \iint \tilde{x}^2 + y^2\,d\tilde{x}\,dy$$

R: $\tilde{x}^2+y^2=1,\ y \geq 0$

$$= \frac{3}{\sqrt2}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2 r\,dr\,d\theta = \frac{3\pi}{4\sqrt2} = \boxed{\frac{3\pi}{8}\sqrt2}$$

Altså blir $\underline{\underline{I = \sqrt2\left(\frac{3\pi}{8}-1\right)}}$

Oppgave 4, des. 06

b) Skal verifisere at $\iint_S \text{curl}\,\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

Dersom vi observerer at $\mathbf{F} = \langle x, y, z\rangle = \text{grad}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)$, er både venstre- og høyresida automatisk 0.
(For $\mathbf{F} = \langle x,y,z\rangle$ gjelder dette for alle stykkevis glatte flater med rand som består av en eller flere lukkede kurver.)

Alternativt kan vi gjøre litt mer ut av det:

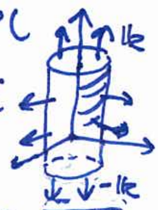
$$\text{curl}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \langle 0,0,0\rangle \Rightarrow \iint_S \text{curl}\,\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iint_S 0\,dS = \underline{0}$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C x\,dx + y\,dy + z\,dz = \frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}\sin^2 t\Big]_0^{2\pi} = 0 + 0 = \underline{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{array}\right\} 0 \leq t \leq 2\pi$$

Divergensteoremet

Oppgave 5, des. 07 : Dersom det var spørsmål om fluksen ut gjennom sylinderflaten S, har vi ($\mathbf{F} = \langle x, e^{\sin^2 x}, (5+3y^{200})^7\rangle$):



$$\underbrace{\iint_{\ominus_1} (5+3y^{200})^7\,dA - \iint_{\ominus_1} (5+3y^{200})^7\,dA}_{0} + \boxed{\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS} = \iiint_V 1\,dV = \pi\cdot 1^2\cdot 6 = \boxed{6\pi}$$