**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Midtsemesterprøve i fag MA1103 Flerdimensjonal analyse, løsningsforslag

Oppgave 1 Vi skal sette opp definisjonen av den partiellderiverte av en funskjon $f(x,y)$ med hensyn på x i et punkt (a,b). Denne er:

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

.

(Typiske feil: Byttet ut a og b med x og y, ikke skrevet $\lim_{h\to 0}$ foran utrykket. Det siste er en grov feil!)

Oppgave 2 Oppgitt: $T(x,y) = (x-2)^2 + y^2$ gir temperaturen i et punkt (x,y) i xy-planet.

a) Nivåkurver finner vi ved å sette $T(x,y) = c$ for varierende konstanter c. Legg merke til at vi kun kan velge $c \geq 0$. Vi ser at alle nivåkurvene blir sirkler med sentrum i $(2,0)$. Se figur i vedlegg.

(NB! Skriv navn og skala på aksene, og marker hvilket nivå de ulike sirklene representerer!)

b) Temperaturen øker mest i gradientretning. Vi finner derfor gradienten i det oppgitte punktet $(1,1)$.

$$\nabla T(x,y) = [2(x-2), 2y]$$

$$\nabla T(1,1) = [-2, 2]$$

Temperaturen øker mest dersom vi går i retning $[-2,2]$. (På skissen over nivåkurvene er dette en vektor som står vinkelrett på nivåkurven gjennom $(1,1)$ ut fra punktet $(1,1)$.)

c) For å finne temperaturforandringen i den retningen billen kryper, må vi først finne billens bevegelsesretning. Siden den kryper langs den rette linja $y = 2x - 1$ vil den ha (konstant) retningsvektor $\mathbf{u} = [1,2]$ (evt $[-1,-2]$, hvis den kryper motsatt vei langs linja). Når vi skal finne den retningsderiverte må vi bruke en enhetsvektor for å finne temperaturforandring pr. lengdeenhet:

$$D_{\hat{\mathbf{u}}} = \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla T(1,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}[1,2] \cdot [-2,2] = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2+4) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Forandringen pr. lengdenhet er altså $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (grader pr. lendeenhet, dersom temperaturen måles i grader). Det er mer naturlig å angi temperaturforandring pr. tidsenhet, så vi multiplisere med billens fart, som er 1, så vi får $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (grader pr. tidsenhet). Merk at temperatur*forandringen* er den samme enten billen kryper oppover eller nedover langs linja $y = 2x - 1$, forskjellen er om den merker en temperaturøkning eller en temperaturminkning.

d) For å holde jevn temperatur må billa krype langs (tangentielt på) nivåkurven gjennom punktet $(1,1)$, det vil si i en retning vinkelrett på gradientvektoren. Vi lar $\hat{\mathbf{v}} = [v_1, v_2]$ være en enhetsvektor i denne retningen. Da har vi altså kravene

(i) $\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla T(1,1) = 0$ og

(ii) $|\hat{\mathbf{v}}| = 1$.

Den første betingelsen gir $[v_1, v_2] \cdot [-2, 2] = -2v_1 + 2v_2 = 0$, så $v_1 = v_2$. Bruker vi dette i den andre betingelsen får vi:

$$|\hat{\mathbf{v}}|^2 = v_1^2 + v_2^2 = 2v_1^2 = 1,$$

så vi må ha $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ eller $v_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Billen bør altså krype enten i retning $\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1]$ eller $-\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1]$. (En kan merke seg her at vi egentlig ikke trenger betingelse (ii), siden det er nok for oss å vite *forholdet* mellom x- og y-komponenten til vektoren. Her har vi at $v_1 = v_2$, så vi kan velge vektoren $[1,1]$ eller $[-1,-1]$ for å angi de mulige retningene.)

(Mange har oppgitt riktig retning uten begrunnelse. Dersom en ser retningen ut fra figuren i oppgave a), må en likevel begrunne, feks ved å vise at prikkproduktet mellom $[1,1]$ og $\nabla T(1,1)$ er 0.)

Oppgave 3 Oppgitt: En annen bille kryper i rommet langs den elliptiske skjæringskurven mellom flatene $x^2 + y^2 = 1$ og $z = 12 - x - 2y$.

a) Siden kurva ligger på en sylinder om origo med radius 1 er det naturlig(?) å prøve med en parametrisering som involverer $\cos\theta$ og $\sin\theta$:

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta \\ y &= \sin\theta \\ z &= 12 - \cos\theta - 2\sin\theta \end{aligned} \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

(Det trekkes poeng dersom det ikke er oppgitt noe intervall parameteren skal gjennomløpe. Merk også at dersom dere velger feks. $x = t$ som parameter, må dere oppgi *to* separate parametriseringer, ikke *en* parametrisering der y kan velges lik $+/-\sqrt{1-t^2}$.)

b) Først deriverer vi parametriseringen vår:

$$\begin{aligned} x' &= -\sin\theta \\ y' &= \cos\theta \qquad\qquad , \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \\ z' &= \sin\theta + 2\cos\theta \end{aligned}$$

Buelengden er da gitt ved følgende integral, der C er den aktuelle kurven, og $\mathbf{r}(\theta)$ er parametriseringen vi har valgt:

$$s = \int_C ds = \int_0^{2\pi} |\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}|\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 + (\sin\theta + 2\cos\theta)^2}\, d\theta$$

Oppgave 4 Gitt funksjonen $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$.

a) Kritiske punkt har vi der gradientvektoren er $\mathbf{0}$, dvs vi må ha

$$\frac{\partial f}{dx} = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{dy} = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} = 0.$$

Det eneste punktet som tilfredstiller begge likningene, er punktet $(0, 0)$, så origo er eneste kritiske punkt.

b) Om en studerer funksjonen, er det ganske opplagt(?) at origo må være et (globalt) bunnpunkt. Det holder å begrunne dette med at $1 + x^2 + y^2 \ge 1$ for alle (x, y), og at ln er en strengt voksende funksjon. Dersom vi skal klassifisere på "vanlig"måte, finner vi de dobbeltderiverte til f og setter opp Hessian matrisa i punktet $(0, 0)$:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(1+x^2+y^2)-4x^2}{(1+x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(1+x^2+y^2)-4y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}$.

Setter vi inn punktet $(0, 0)$ får vi følgende matrise:

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Siden $\det H(0, 0) = 4 > 0$ og $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$ er $(0, 0)$ et (lokalt) minimumspunkt.

Oppgave 5 Vi skal finne det største volumet en rektangulær boks kan ha når den skal ligge inne i ellipsoiden $(\frac{x}{2})^2 + y^2 + z^2 = 1$ og ha sideflater parallelle med koordinatplana; se figur i vedlegg.

Volumet blir $V(x, y, z) = 8xyz$. Dette skal vi maksimere under tileggsbetingelsen $(\frac{x}{2})^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Vi kan anta at både x, y og z er ekte større enn 0.) La $g(x, y, z) = (\frac{x}{2})^2 + y^2 + z^2$. Bruker vi Lagrange metode, skal vi altså løse likningssystemet

$$\begin{array}{rl} \nabla V(x,y,z) & = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) & = 1 \end{array},$$

eller ekvivalent

$$\begin{array}{ll} (1) & 8yz = \lambda \frac{x}{2} \\ (2) & 8xz = \lambda 2y \\ (3) & 8xy = \lambda 2z \\ (4) & (\frac{x}{2})^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array}$$

Her kan vi for eksempel multiplisere (1), (2) og (3) med henholdsvis x, y og z og få

$$8xyz = \lambda \frac{x^2}{2} = \lambda 2y^2 = \lambda 2z^2.$$

Siden $\lambda = 0$ gir volum 0 (minimum), antar vi $\lambda \neq 0$, og likningene reduserer da til $(\frac{x}{2})^2 = y^2 = z^2$. Bruker vi dette i (4), får vi $\frac{x}{2} = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Dermed blir maksimalvolumet $V(2\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{16}{9}\sqrt{3}$.