Faglig kontakt: Kari Hag, tlf. 73593521, 48301988 **Studentnr.**

SEMESTERPRØVE I MA1103 den 13.03.07. Bokmål.

Tid: 90 min. Hjelpemidler: Kalkulator HP30S og utdelt formelark.

Innføring på oppgavearket. Grunngi svarene, og ta med alle nødvendige mellomregninger.

Oppgave 1 Anta at $z = \frac{x-y}{x+y}$ der $x = uvw$ og $y = u^2 + v^2 + w^2$.

a) Finn $\frac{\partial z}{\partial x}$ og $\frac{\partial z}{\partial y}$ når $x = -2, y = 6$.

b) Finn $\frac{\partial z}{\partial u}$ når $\underline{u = 2, v = -1, w = 1}_{*}$.

a) $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-2,6)} = \left.\frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}\right|_{(-2,6)} = \left.\frac{2y}{(x+y)^2}\right|_{(-2,6)} = \frac{12}{4^2} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(-2,6)} = \left.\frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}\right|_{(-2,6)} = -\left.\frac{2x}{(x+y)^2}\right|_{(-2,6)} = \frac{4}{4^2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

b) $$\left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{*} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-2,6)} \cdot \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{*} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(-2,6)} \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{*}$$

$$= \frac{3}{4}(-1)\cdot 1 + \frac{1}{4}\,2\cdot 2 = \boxed{\frac{1}{4}}$$

(Alternativt kan $\frac{\partial z}{\partial u}$ regnes ut ved innsetting og uten bruk av kjerneregel.)

Oppgave 2 Funksjonen f er gitt ved $f(x, y) = 6 - 4x^2 - y^2$.

a) Finn ligningen for tangentplanet til grafen til f i punktet $(1, -1, 1)$.

b) Finn ligningen for tangentlinjen til nivåkurven til f gjennom $(1, -1)$.

$\nabla f = \langle -8x, -2y \rangle$, $\nabla f(1,-1) = \langle -8, 2 \rangle$

a) Ligning for tangentplanet til f i $(1,-1,1)$:

$-8(x-1) + 2(y+1) - (z-1) = 0$

eller

$$\boxed{z = 11 - 8x + 2y}$$

b) $\nabla f \cdot (\mathbb{r} - \mathbb{r}_0) = 0$ "Gradienten er normal til nivåkurven"

$\langle -8, 2 \rangle \langle x-1, y+1 \rangle = 0$

$-8x + 2y + 10 = 0$

$$\boxed{y = 4x - 5}$$

(Alternativt kan en finne stigningstallet til tangenten til ellipsen $y^2 = 5 - 4x^2$ i $(1,-1)$ ved implisitt derivasjon, $2yy' = -8x$, eller ved å derivere $y = -\sqrt{5-4x^2}$ direkte.)

Studentnummer:

Oppgave 3 La funksjonen f være gitt ved

$$f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}, \ (x,y) \in D$$

der D er sirkelskiva $x^2 + y^2 \leq 4$.

a) Begrunn at $f(x,y) \leq 2e^{-2}$ når $x^2 + y^2 = 4$.

b) Vis at f oppnår sin største verdi i punktene $(1,1)$ og $(-1,-1)$.

Anta at D er utsnittet av et kart og at $z = f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$ angir høyden over havet i punktet (x,y).

c) Ei geit befinner seg i punktet $(1,0,0)$ i terrenget $z = f(x,y)$. Geita går i retning av nærmeste fjelltopp. Finn vinkelen med horisontalplanet geita beveger seg i i startøyeblikket.

a) $x^2 + y^2 = 4 \iff x = 2\cos\theta, \ y = 2\sin\theta; \ \theta \in [0, 2\pi]$

$\boxed{f(2\cos\theta, 2\sin\theta) = 4\sin\theta\cos\theta\, e^{-2} = 2\sin 2\theta \cdot e^{-2} \leq 2e^{-2}}$

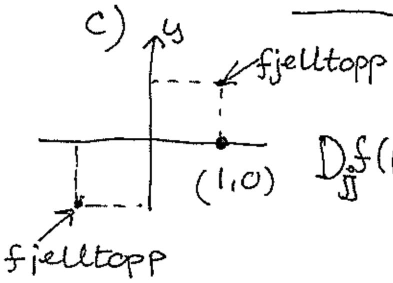
b) f oppnår sin største verdi på randa eller i et kritisk punkt i $x^2+y^2 < 4$. Finner de kritiske punktene for så å sammenligne verdier:

$$f_x = (y - x^2y)e^{-(x^2+y^2)/2} = 0 \iff y(1-x^2) = 0 \iff y=0, x\pm 1$$

$$f_y = (x - y^2x)e^{-(x^2+y^2)/2} = 0 \iff x(1-y^2) = 0 \iff x=0, y=\pm 1$$

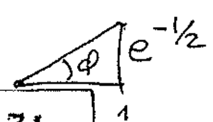
I alt fem kritiske punkter: $(0,0), (\pm 1, \pm 1)$.
Største verdi i det indre oppnås i $(1,1)$ og $(-1,-1)$.
Da verdien her er $e^{-1} = \frac{e}{e^2} > \frac{2}{e^2}$, er dette største verdi.

c)



Geita går i $\vec{j}$-retning.

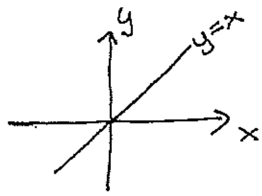
$D_{\vec{j}} f(1,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = e^{-1/2}$; $\tan\phi = \frac{1}{\sqrt{e}}$



slik at $\boxed{\phi = \arctan\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.545 \text{ eller } \approx 31.2^\circ}$

Oppgave 4 Gi eksempel på en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som ikke er kontinuerlig i $(0,0)$, men har partielle deriverte i $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{når } xy = 0 \\ 1 & \text{ellers} \end{cases}$$



$f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$ da $f(x,0) = 0 = f(0,y)$

Også klart at f ikke er kontinuerlig;

f. eks. er $\lim\limits_{x \to 0} f(x,x) = 1$.