Løsningforslag til midsemesterprøve i MA1103 - 2008V

Oppgave 1

Siden $\mathbf{r}(t) =< t^3, t^3+1, t^3+2 >$ er

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2 < 1,1,1 > \Rightarrow |\mathbf{r}'(t)| = 3\sqrt{3}t^2$$

Siden de oppgitte punktene svarer til $t = 0$ og $t = 1$ gir dette:

$$L = \int_0^1 3\sqrt{3}t^2 dt = \sqrt{3}t^3|_0^1 = \sqrt{3}$$

NB: De lureste har kanskje bemerket at C er en rett linje og derfor kan buelengden beregnes som avstanden mellom de oppgitte punktene:

$$L = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

Kommentar: Her var det flere som brukte de oppgitte punktene som grenser til buelengdeintegralet. Husk at vi integrerer en funksjon av en parameter t, og da må vi ha grenser for dette integralet som er tall, ikke koordinater i 3 dimensjoner.

Oppgave2

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^2}{x^2+y^2} & \text{hvis}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{hvis } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dette gir:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^2 h} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{h} = \pm\infty$$

Så $f_x(0,0)$ eksisterer og er lik 1, men $f_y(0,0)$ eksisterer ikke.
Kommentar: Her var det flere som prøvde å bevise at funksjonen ikke var kontinuerlig i origo. Dette var et helt annet problem.

Oppgave 3

Siden $z = (6\cos t - 7e^t)^{2008}$ får vi:

$$\frac{dz}{dt} = 2008 \underbrace{(6\cos t - 7e^t)^{2007}(-6\sin t - 7e^t)|_{t=0}}_{a} = 2008 \cdot 7 \Rightarrow a = 7$$

Bemerk at oppgaven også kan løses ved bruk av kjerneregelen:

$$\frac{dz}{dt}(0) = \frac{\partial z}{\partial x}(2,1)\frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial z}{\partial y}(2,1)\frac{dy}{dt}(0), \quad (x(0) = 2, y(0) = 1)$$

Kommentar: Det var mange som "glemte" eksponenten ^{2007} i den deriverte. Dette er en alvorlig feil.

Oppgave 4a

Høyden øker mest i retning av gradienten ∇f:

$$\nabla f(1,2) =< 6 - 2x, -2y > |_{(x,y)=(1,2)} =< 4, -4 >$$

Siden vi vil gå nedover og ikke oppover, blir svaret $-\nabla f = 4 < -1, 1 >$.

Stigningstallet i retningen $-\nabla f = 4 < -1, 1 >$ er gitt ved den retningsderiverte $D_{-\frac{\nabla f}{|\nabla f|}}(f)$:

$$(-\frac{\nabla f}{|\nabla f|}) \cdot \nabla f = -|\nabla f| = -4\sqrt{2}$$

og dette er fallet per horisontal enhet i retning minus gradienten. Dermed har vi at vinkelen med horisontalplanet blir:

$$\arctan(-4\sqrt{2}) \sim -80^\circ$$

Kommentar: Her var det folk som svarte at gradienten pekte mot retningen hvor funksjonen minsket mest! Det var mange som ikke klarte å bruke den retningsderiverte for å beregne vinkelen. Husk at retnigsderiverte gir stigningstallet i en gitt retning.

Oppgave 4b

Retningen av gradienten er ortogonal til nivåkurver, eller om en heller vil: Den retningsderiverte er 0 i retning ortogonalt til gradienten. Gradienten pekte $< 1, -1 >$ så hun må gå i retning $< 1, 1 >$ eller $< -1, -1 >$.

Oppgave 5a

Vi beregner:

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow y = x^2$$
$$f_y = 3y^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow y = y^2$$

Som ved substitusjon gir $x = x^4$ og dermed $(x,y) = (0,0)$ eller $(x,y) = (1,1)$.

Videre er $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = f_{yx} = -3$ og $f_{yy} = 6y$ som gir oss:

$$\Delta(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow SADELPUNKT$$

$$\Delta(1,1) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} > 0, f_{xx}(1,1) > 0 \Rightarrow LOK.MIN$$

Kommentar: Mange klarte ikke å finne de to kritiske punktene, eller fant mer punkter som ikke var kritiske. Det var veldig få som sjekket at punktene som ble funnet var "virkelige" løsninger til $\nabla f = 0$. Dette kunne ha hjulpet til å avsløre denne feilen. Mange hadde problemer med å klassifisere punktene. Dere må jobbe litt mer med andrederivert-testen. Reformulering i remark øverst på side 712 er uheldig. Det er ingen grunn til ikke å ta utgangspunkt i $AC - B^2$.

Oppgave 5b

Restriksjonen til x-aksen har formen $f(x,0) = 4 + x^3$. Av dette ser vi at f ikke har noe globalt minimumspunkt siden:

$$\lim_{x \to -\infty} 4 + x^3 = -\infty$$