Hvordan definere deriverbarhet for $z = f(x,y)$ i punktet (a,b)?

De part. deriverte duger ikke uten videre!

Eks $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{når } xy \neq 0 \\ 0 & \text{når } xy = 0 \end{cases}$

$f_x(0,\underline{0}) = 0 = f_y(\underline{0},0)$, men f er ikke kont. i $(0,0)$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x,x) = 1$

12.3.36, 30, er et vanskeligere eksempel.

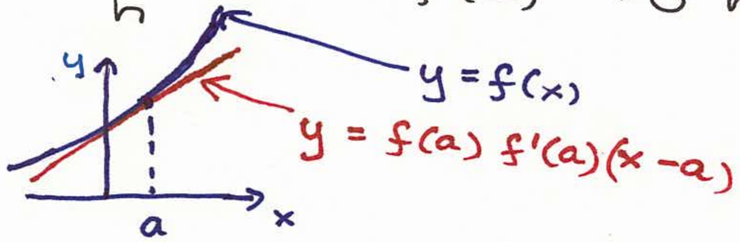
Linear approksimasjon og deriverbarhet [12.6]

Fra MA 1101:

f deriverbar i a med derivert $f'(a)$ betyr

$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + E(h)$ der $\lim\limits_{h \to 0} \frac{E(h)}{h} = 0$

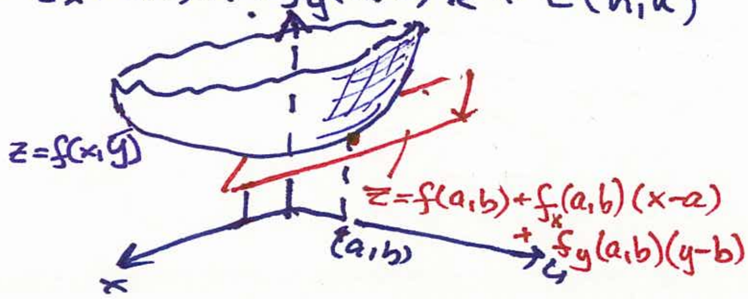
$\left(\frac{E(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \to 0 \text{ når } h \to 0 \right)$



Nå: Sier $z = f(x,y)$ er <u>deriverbar</u> i et indre punkt $(a,b) \in D(f)$ når $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ eksisterer, og

(*) $f(a+h, b+k) = f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + E(h,k)$

der $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$



Nå har vi den glattheten vi forutsatte da vi definerte tangentplan.

<u>Def.</u> Dersom f er deriverbar i (a,b) sier vi at

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

er <u>tangentplanet</u> til $z = f(x,y)$ i (a,b).

Vi snakker også om at tangentplanet gir en lineær approksimasjon til $f(x,y)$ nær (a,b).

<u>Observer</u> f deriverbar i $(a,b) \Rightarrow f$ kont. i (a,b).
(# 17 på 5. Øving.)

Definisjonen av deriverbarhet lite praktisk! Heldigvis har vi

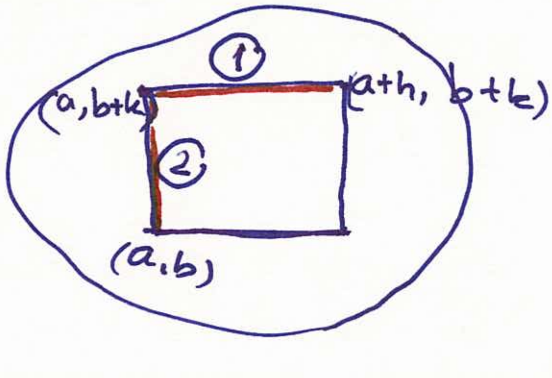
T4 Dersom $z = f(x,y)$ har (første ordens) partiell deriverte i en omegn om (a,b), og disse er kont. i (a,b), så er f deriverbar i (a,b).

<u>Lemma (T3)</u> – MVT i to variable:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b)$$
$$= f_1(a+\theta_1 h, b+k)h + f_2(a, b+\theta_2 k)h \quad (0<\theta_1,\theta_2<1)$$

<u>Bevis</u> MVT (SS) på intervallet ① og ②:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b+k)$$
$$= f_1(a+\theta_1 h, b+k)h \quad (0<\theta_1<1)$$



$$f(a,b+k) - f(a,b)$$
$$= f_2(a, b+\theta_2 k)k \quad (0<\theta_2<1)$$

Adder! □

Boka har et bevis for kjerneregelen når $z = f(x,y)$ der $x = u(s,t)$ og $y = v(s,t)$. Det blir nokså mange bokstaver å holde styr på, så la oss heller skrive ut beviset når $z = f(x,y)$ der f er kont. deriverbar i (a,b), $x = x(t)$, $y = y(t)$ deriverbare i t_0 og $x(t_0) = a$, $y(t_0) = b$. Fra ⊛ s. 1 har vi

$$(1) \quad z = f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + E$$

der $E/\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \to 0$ når $(x,y) \to (a,b)$

$$\boxed{\frac{dz}{dt}(t_0)} = \lim_{t\to t_0} \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}$$

$$= \lim_{t\to t_0} \frac{f(x(t),y(t)) - \overbrace{f(x(t_0),y(t_0))}^{f(a,b)}}{t-t_0}$$

$$\underset{(1)}{=} \lim_{t\to t_0} \frac{f_x(a,b)(x(t)-a) + f_y(a,b)(y(t)-b) + E}{t-t_0}$$

$$= f_x(a,b)\, x'(t_0) + f_y(a,b)\, y'(t_0)$$

da

$$\lim_{t\to 0} \frac{E}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{E\sqrt{(x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2}}{\sqrt{(x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2}\,(t-t_0)}$$

$$= \pm \lim \frac{E}{\sqrt{}} \cdot \sqrt{\underbrace{\left(\frac{x(t)-a}{t-t_0}\right)^2}_{\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\right)^2} + \left(\frac{y(t)-b}{t-t_0}\right)^2}$$

$$= 0 \cdot \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2} = 0.$$

□

Bevis T4

(Foruten Lemma bruker vi trekantulikheten og ulikhetene $\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$, $\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$.)

$$E(h,k) = \underline{f(a+h,\, b+k) - f(a,b)} - f_1(a,b)h - f_2(a,b)k$$
$$\underset{\text{Lemma}}{=} f_1(a+\theta_1 h,\, b+k)h + f_2(a,\, b+\theta_2 k)k$$

$$\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{[f_1(a+\theta_1 h, b+k) - f_1(a,b)]h + [f_2(a, b+\theta_2 k) - f_2(a,b)]k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Altså følger ved trekantulikhet

$$\frac{|E(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq |f_1(a+\theta_1 h, b+k) - f_1(a,b)| \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$+ |f_2(a, b+\theta_2 k) - f_2(a,b)| \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$\longrightarrow 0 \quad \text{når } (h,k) \to (0,0)$$

da f_1 og f_2 er kont. i (a,b) i tillegg til at $\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$, $\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$ $\square$

Kjernereglene kan nå vises under forutsetn. av at de ytre funksjonene er deriverbare (noe de sikkert er dersom de har kont. part. der.).

Funksjoner fra n-rommet til m-rommet ikke pensum.