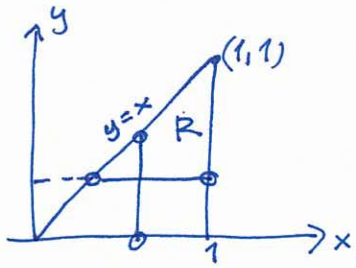
LØSNINGSSKISSER TIL 8. ØVING

14.2.15



$$\int_0^1 \left[\int_y^1 e^{-x^2}\,dx\right] dy = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 -2x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}\Big]_0^1$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)}$$

14.4.30:

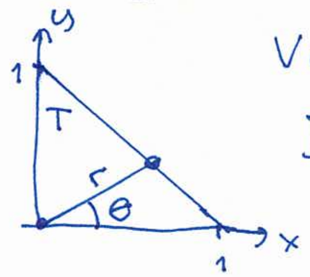
$$V = \iint_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx\,dy, \quad D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$$

Innfører vi $x = au$, $y = bv$, får vi

$$V = \iint_{u^2+v^2\le 1} (1 - u^2 - v^2)\, a\,du\, b\,dv$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (1-r^2)\, r\,dr\,d\theta = \frac{\pi ab}{2}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi ab}{8}}$$

14.4.35:



Vi skal beregne dobbeltintegralet

$$I = \iint_T e^{(y-x)/(y+x)}\,dA$$ på to måter,

a) ved å innføre polarkoordinater.

$$x + y = 1 \iff r\cos\theta + r\sin\theta = 1 \iff r = \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$$

Altså har vi

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{(\cos\theta+\sin\theta)^{-1}} e^{\sin\theta - \cos\theta/\sin\theta + \cos\theta}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin\theta - \cos\theta/\sin\theta+\cos\theta} \cdot \left(\frac{1}{\sin\theta + \cos\theta}\right)^2 d\theta$$

Nå har vi heldigvis fått den deriverte av $u = \dfrac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ med på kjøpet:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{(\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2}{(\sin\theta + \cos\theta)^2} = \frac{2}{(\sin\theta + \cos\theta)^2}$$

Altså har vi kommet fram til

$$I = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^u \, du$$

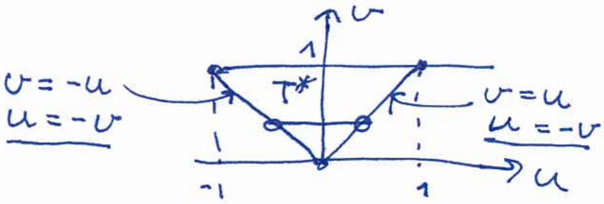
siden $u(\frac{\pi}{2}) = 1$, $u(0) = -1$,

og $\boxed{I = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)}$

b) ved å bruke lineær transformasjonen S

$$\left.\begin{array}{l} u = y - x \\ v = y + x \end{array}\right\} \quad \left(\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

Ser at linja $y + x = 1$ avbildes på $\underline{v = 1}$, mens $y = 0$ avbildes på $\underline{v = -u}$ og $x = 0$ på $\underline{u = v}$. Altså får vi nå trekanten T^* som ser slik ut

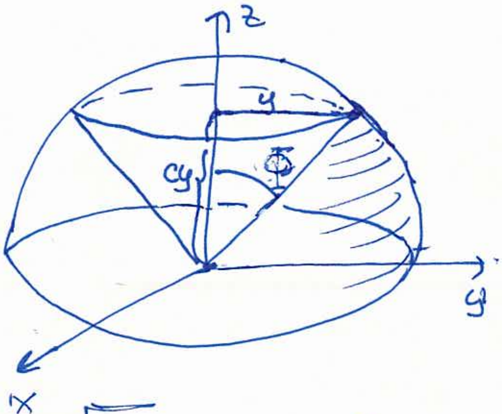


$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \underline{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}}$$

$$I = \frac{1}{2}\iint_{T^*} e^{u/v} \, du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_{-v}^{v} e^{u/v} du\right] dv = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(ve - \frac{v}{e}\right) dv = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

<u>Kommentar</u> Siden S er en lineærtransformasjon, kunne vi sett på $S(0,0)$, $S(1,0)$ og $S(1,1)$ og trukket T^*.
Siden S er en lineærtransformasjon er det også lett å finne den inverse transformasjonen: $x = \frac{1}{2}(-u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u+v)$ og vi har $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}$ direkte.

14.6.27 Vi innfører kulekoordinater:

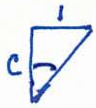


$$\tan \Phi = \frac{1}{c} \quad (c \neq 0)$$

$$\Phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\Phi}\int_0^{a} \rho^2 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$\boxed{I = 2\pi \frac{a^5}{5}(1-\cos\Phi) = \frac{2\pi a^5}{5}\left(1 - \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right)}$$



Bmk Formelen holder også for $c = 0$.

14.7.1 $dS = \sqrt{1+4+4}\, dA = 3\, dA$ slik at arealet blir $3 \cdot \pi \cdot 1^2 = \underline{\underline{3\pi}}$

14.7.10 $z_1 = 2xy$ og $z_2 = x^2 + y^2$. Har da

$$dS_1 = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\, dA = dS_2$$

Flatene har samme areal over samme område i xy-planet.

14.7.18 Massen av terningen er

$$\iiint_T \delta(x,y,z)\, dV = \int_0^a\int_0^a\int_0^a (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz = 3\frac{a^5}{3} = \underline{a^5}$$

Ved symmetri må $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$, så vi beregner bare

$$\bar{x} = \frac{1}{a^5}\iiint_T x\,\delta\, dV = \frac{1}{5}\int_0^a\int_0^a\int_0^a (x^3 + xy^2 + xz^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \underline{\underline{\frac{7a}{12}}}$$

14.5.14

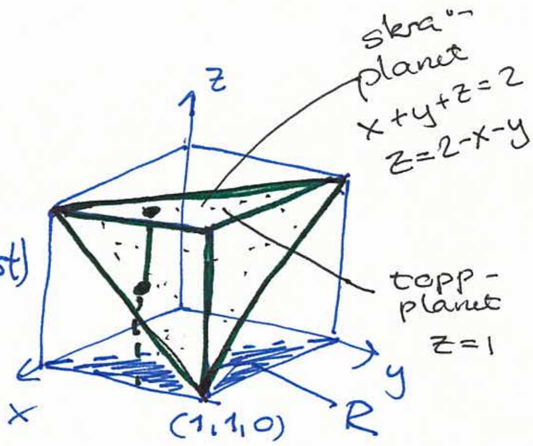
$$V = \iint_E \int_0^{2+x} dz = \iint_E (2+x)\, dA$$

$$= 2 \text{ Areal } E = 2\pi\, 2\cdot 1 = \underline{\underline{4\pi}}$$

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \le 1$

$x\Delta A$ hever seg mot $-x\Delta A$

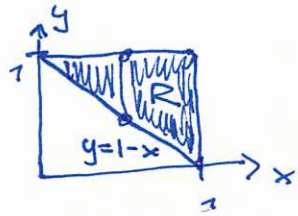
14.5.15



T er det romlige området mellom planet $z = 2-x-y$ (nederst) planet $z = 1$ (øverst) over xy-trekanten R. Altså har vi

$$\iiint_T x\, dV = \iint_R \left[\int_{2-x-y}^{1} x\, dz\right] dA = \iint_R x(-1+x+y)\, dA$$

$$= \int_0^1 x \int_{1-x}^{1} (x-1+y)\, dy\, dx = \int_0^1 x \cdot \frac{x^2}{2}\, dx = \boxed{\frac{1}{8}}$$



14.6.25 Innfører kulekoordinater

$$\iiint_B (x^2+y^2)\, dV \qquad \int_0^a (\rho \sin\phi)^2 \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^a \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin^3\phi\, d\phi = 2\pi \frac{a^5}{5} \int_0^\pi (1-\cos^2\phi)\sin\phi\, d\phi$$

$$\overset{\boxed{\begin{array}{l} u = -\cos\phi \\ du = \sin\phi\, d\phi \end{array}}}{=} \frac{2\pi a^5}{5} \int_{-1}^{1} (1-u^2)\, du = \boxed{\frac{4\pi a^5}{5}}$$