Annenderiverttest for fu. av 2 variable (T 3 med $n=2$)

Anta at f har kont. partielle deriverte av 2. orden i en omegn om et kritisk punkt (a,b).
La $A = f_{xx}(a,b)$, $B = f_{xy}(a,b)$, $C = f_{yy}(a,b)$ og sett
$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Da gjelder

i) $\Delta > 0$ og $A > 0 \Rightarrow (a,b)$ gir et lok. min.

ii) $\Delta > 0$ og $A < 0 \Rightarrow$ ——— " ——— maks

iii) $\Delta < 0 \Rightarrow$ Enhver omegn om (a,b) inneholder pkt der $f(x,y) > f(a,b)$ og pkt der $f(x,y) < f(a,b)$; (a,b) kalles et sadelpunkt.

(Ingen generell konklusjon når $\Delta = 0$)

Beviset bygger på Taylors formel ($n=1$) med restleddet på Lagranges form, og omforming av en kvadratisk form. Nærmere bestemt, La

$$g(t) = f(a+th, b+tk), \quad 0 \le t \le 1. \text{ Har}$$

$$g(0+1) = g(0) + g'(0)\cdot 1 + \tfrac{1}{2} g''(\theta)\cdot 1^2 \text{ der } \theta \in (0,1)$$

Med vår g blir dette – HUSK KJERNEREGELEN –

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \underbrace{f_x(a,b)}_{0} h + \underbrace{f_y(a,b)}_{0} k + \tfrac{1}{2}\tilde{Q}(h,k)$$

((a,b) kritisk punkt)

der $\tilde{Q}(h,k) = \tilde{A}h^2 + 2\tilde{B}hk + \tilde{C}k^2$ med

$\tilde{A} = f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k)$, $\tilde{B} = f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k)$, $\tilde{C} = f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k)$

Da de 2. der. er kontinuerlige, vil i) ii) iii) også være oppfylt for $\tilde{\Delta}$ og $\tilde{A}$ bare h og k er tilstr. små.

$$\tilde{Q}(h,k) \underset{\tilde{A}\neq 0}{=} \tilde{A}\left(h + \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}}k\right)^2 + \frac{\tilde{A}\tilde{C} - \tilde{B}^2}{\tilde{A}}k^2 = \tilde{A}\left(h + \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}}k\right)^2 + \frac{\tilde{\Delta}}{\tilde{A}}k^2$$

Vi ser at i) $\Rightarrow f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}\tilde{Q}(h,k) > 0$

ii) $\Rightarrow f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}\tilde{Q}(h,k) < 0$

Dersom $\tilde{A} \neq 0$ (eller $\tilde{C} \neq 0$ tilsvarende) følger iii) (HVORFOR?)
Dersom $\tilde{A} = 0 = \tilde{C}$, vil $\tilde{Q} = 2\tilde{B}hk$, og $\tilde{Q}$ kan være både positiv og negativ i enhver omegn.

$\square$