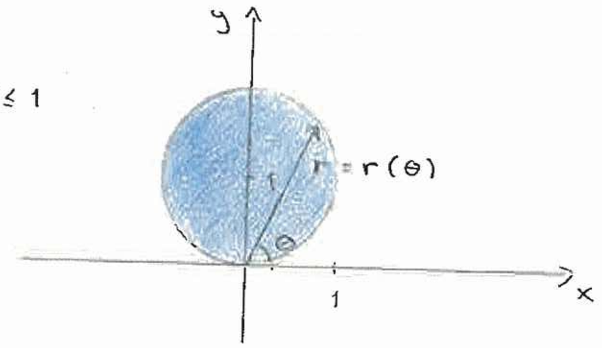
VEDLEGG TIL LØSNINGSFORSLAG, EKSAMEN MA1103, V.06

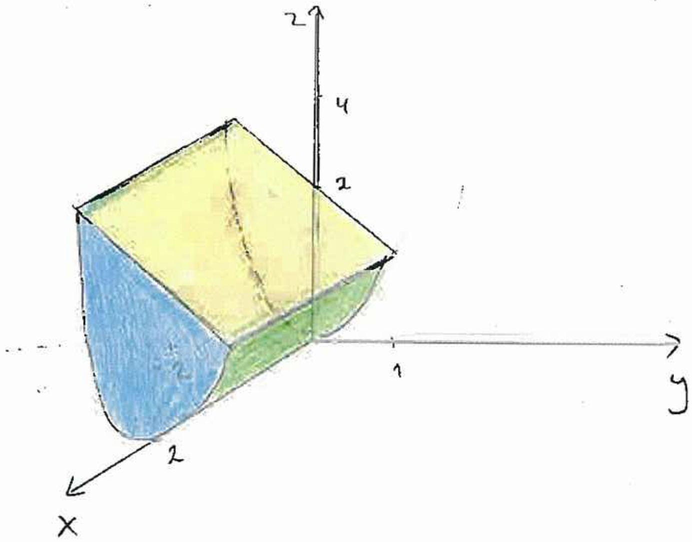
Figur 1 (oppgave 2)

D: $x^2 + (y-1)^2 \le 1$

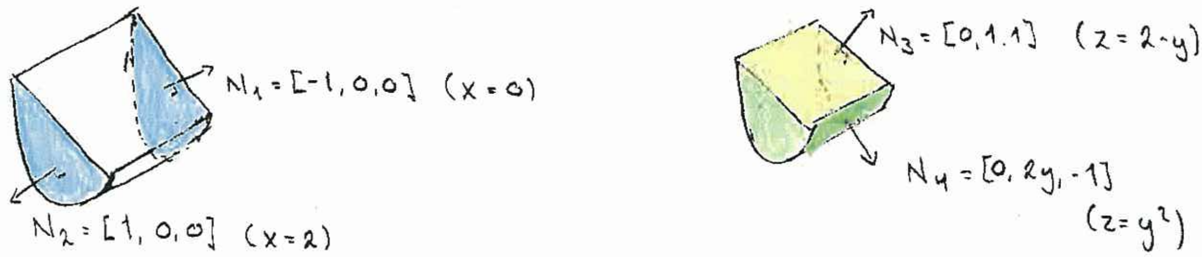


Figur 2 (oppgave 3 a))

R:

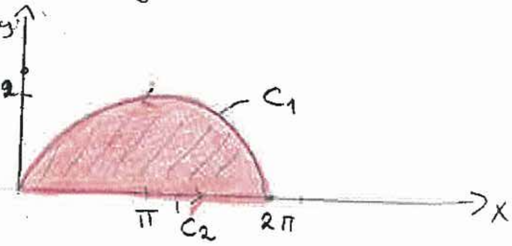


Figur 3 (oppgave 3 b))



Figur 4 (oppgave 4 b))

D:



EKSAMEN MA1103 19. desember - 06

Oppgave 1.

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y\cos(x^2+y^2)}{x+y}$

- langs x-aksen $(y=0)$: $\lim\limits_{(x,0)\to(0,0)} \dfrac{0\cdot\cos x^2}{x} = \underline{0}$

- langs y-aksen $(x=0)$: $\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} \dfrac{y\cos y^2}{y} = \underline{1}$

Siden vi får forskjellig grenseverdi avhengig av hvilken vei vi går inn mot punktet $(0,0)$, eksisterer ikke grenseverdien.

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

- gjør om til polarkoordinater: $x = r\cdot\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$(x,y)\to(0,0) \Rightarrow r\to 0$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r} = \lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\cdot\sin^2\theta = \underline{0},$$

siden både $\cos\theta$ og $\sin\theta$ er begrensede funksjoner.

Grenseverdien eksisterer og er lik 0.

Oppgave 2

$f(x,y,z) = x + 2y - 3z$ på området $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 108$

- kritiske punkt innenfor området

$\nabla f(x,y,z) = [1, 2, -3] \neq \bar{0}$, så f har ingen kritiske punkt

- maksimal og minimalverdi på randen; $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 108$

Bruker Lagranges metode; $g(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 108 \end{cases}$$

(1) $1 = \lambda 2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2\lambda}$

(2) $2 = \lambda 8y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4\lambda}$

(3) $-3 = \lambda 18z \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{1}{6\lambda}$

(4) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 108$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 108$$

$$3 = 108 \cdot 4\lambda^2$$

$$\underline{\pm \frac{1}{12} = \lambda}$$

Gir følgende punkt: $(6, 3, -2)$, $(-6, -3, 2)$

$f(6,3,-2) = 6 + 6 + 6 = \underline{18}$

$f(-6,-3,2) = -6 - 6 - 6 = \underline{-18}$

Maksimalverdien til f over ellipsoiden er 18, minimalverdien er -18

Oppgave 3

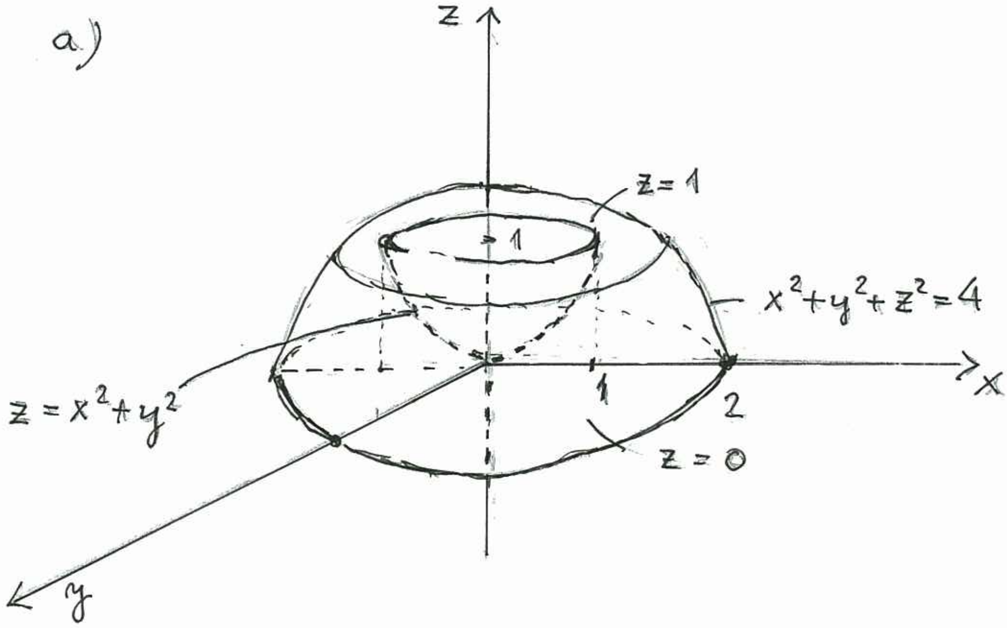
$R: \; x^2+y^2+z^2=4$ (kule)

$z = x^2+y^2$ (paraboloide)

$z=0$ (plan)

$z=1$

a)



b) $V(R) = \iiint_R dV$

Velger sylinderkoordinater

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = z$

$dV = dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{4-z^2}} r\,dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_{\sqrt{z}}^{\sqrt{4-z^2}} dz = \pi \int_0^1 (4-z^2-z)\,dz = \pi\left[4z - \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{2}z^2\right]_0^1$$

$$= \pi\left(4-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}\right) = \underline{\frac{19\pi}{6}}$$

Volumet av R er $\frac{19\pi}{6}$

c) Mengde stjernestøv på flaten S (der $x^2+y^2+z^2=4$)

$$\iint_S f\,dS$$

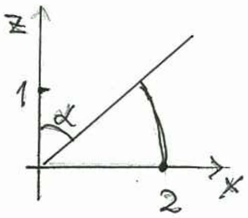
Bruker kulekoordinater;

$$x = 2\cos\theta \cdot \sin\varphi$$
$$y = 2\sin\theta \cdot \sin\varphi$$
$$z = 2\cos\varphi$$

$$dS = 4\sin\varphi \, d\theta \, d\varphi$$

Grenser:

$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$\pi/3 \le \varphi \le \pi/2$$



$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\iint_S f\,dS = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2} 2\cos\varphi \cdot 4\sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= 16\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi \, d\varphi = 2\pi \left[\sin^2\varphi\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \underline{2\pi}$$

<u>Mengden stjernestøv er 2π mg</u>

Oppgave 4

a) Stokes teorem:

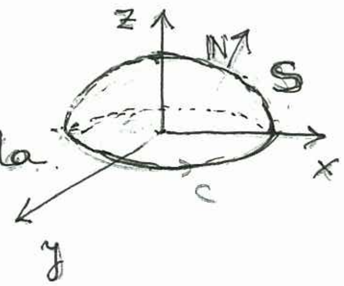
La S være en stykkevis glatt flate med enhets-normalfelt $\hat{\mathbb{N}}$.
La C være randen til S, anta at C består av et endelig antall stykkevis glatte, lukka kurver, med orientering indusert av S. Da gjelder

$$\oint_C \mathbb{F} \cdot d\bar{r} \left(= \oint_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz\right) = \iint_S \operatorname{curl} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} \, dS,$$

hvor $\mathbb{F} = [F_1, F_2, F_3]$ er et glatt vektorfelt definert i en omegn om S.

b) $\mathbb{F} = [x, y, z]$, S: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

La S være orientert med enhets-normalfelt pekende ut av (halv)kula.



1) Parametriserer C: (sirkel i xy-planet, radius 1)

$$x = \cos\theta \qquad y = \sin\theta \qquad z = 0 \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\oint_C \mathbb{F} \cdot d\bar{r} = \int_0^{2\pi} [\cos\theta, \sin\theta, 0] \cdot [-\sin\theta, \cos\theta, 0] \, d\theta = \underline{0}$$

2) $$\operatorname{curl} \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = [0, 0, 0]$$

$$\Rightarrow \iint_S \operatorname{curl} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} \, dS = \underline{0}$$

Vi ser at $\oint_C \mathbb{F} \cdot d\bar{r} = 0 = \iint_S \operatorname{curl} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} \, dS$

Oppgave 5

$$\mathbb{G} = [y-x,\ x^2,\ z-2y]$$

$$\nabla \cdot \mathbb{G} = \frac{\partial}{\partial x}(y-x) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z-2y) = -1+1 = \underline{\underline{0}}$$

Skal finne vektorfelt $\mathbb{F} = [F_1, F_2, F_3]$ slik at $\mathbb{G} = \nabla \times \mathbb{F}$ dvs må ha

(i) $G_1 = y - x = \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}$

(ii) $G_2 = x^2 = \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}$

(iii) $G_3 = z - 2y = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$

Velger $F_3 = 0$ (i) gir da $x - y = \frac{\partial F_2}{\partial z} \Rightarrow F_2 = xz - yz + h_1(x,y)$

(ii) gir $x^2 = \frac{\partial F_1}{\partial z} \Rightarrow F_1 = x^2 z + h_2(x,y)$

Dermed får vi i (iii):

$$z - 2y = z + \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\partial h_2}{\partial y}$$

$$-2y = \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\partial h_2}{\partial y}$$

Velger $h_1 = 0$ $2y = \frac{\partial h_2}{\partial y} \Rightarrow h_2 = y^2$

Dermed $\mathbb{F} = [x^2 z + y^2,\ xz - yz,\ 0]$ er et vektorpotensiale for $\mathbb{G}$

(Test: $\nabla \times \mathbb{F} = [x-y,\ x^2,\ z-2y]$)