BEVISMETODER (2004)

a) Innledning

Definisjon. *Et utsagn er en setning som er enten RETT eller GAL*

Eksempler på setninger som er utsagn:

- År 2005 er skuddår
- $3 + 4 = 7$
- $3 < 2$.

Eksempler på setninger som ikke er utsagn:

- La $x = 2$
- Er det fredag i dag? (Spørsmål er aldri utsagn.)

La P og Q være utsagn.

(i) Utsagnet P OG Q er RETT hvis P er RETT og Q er RETT, men er GALT ellers.
(ii) Utsagnet P ELLER Q er RETT hvis P er RETT eller Q er RETT eller begge er RETTE, men er GALT ellers.
(iii) IKKE P er RETT hvis P er GALT og er GALT hvis P er RETT.

Eksempel:
P: Oslo er hovedstaden i Norge
Q: Stocholm er hovedstaden i Danmark

P er RETT og Q er GALT
P OG Q er GALT fordi Q er GALT
P ELLER Q er RETT fordi P er RETT
IKKE P (Oslo er ikke hovedstaden i Norge) er GALT
IKKE Q (Stockholm er ikke hovedstaden i Danmark) er RETT

La P og Q være utsagn. ”Hvis P, så Q” skrives P $\Rightarrow$ Q, og betyr at hvis P er rett, så er Q rett.

”P hvis og bare hvis Q” skrives P $\Leftrightarrow$ Q. Dette betyr at P $\Rightarrow$ Q OG Q $\Rightarrow$ P.

Med andre ord, ”P hvis og bare hvis Q” har samme betydning som utsagnet ”(Hvis P, så Q) og (hvis Q, så P)”.

Merk: Hvis P $\Rightarrow$ Q OG Q $\Rightarrow$ S, så har vi P $\Rightarrow$ S.

For å vise P $\Rightarrow$ Q kan vi istedet vise IKKE Q $\Rightarrow$ IKKE P.

Merk: Å vise P $\Rightarrow$ Q er ikke ekvivalent med å vise IKKE P $\Rightarrow$ IKKE Q. Eksempel: P: Det regner på Nordre, Q: Nordre er våt. Har da P $\Rightarrow$ Q, mens IKKE P $\Rightarrow$ IKKE Q er GALT.

b) Bevismetoder

1. **Typisk bevis**

   Setning: La A være en $n \times n$-matrise, og la B og C være $n \times n$-matriser som er inverse til A. Da er $B = C$

2. **Ved eksempel**

   Setning: Det fins et odde tall mellom 70 og 73.
   Bevis: 71 er et slikt odde tall.

3. **Ved bruk av variable**

   Setning: Summen av to odde tall er like.
   Bevis La $2k+1$ og $2m+1$ være odde tall, der k og m er hele tall. $(2k+1)+(2m+1) = 2(k+m+1)$, som er et like tall.

4. **Direkte metode for P $\Rightarrow$ Q**

   Vi antar at P er rett, og vil bruke dette til å vise at Q er rett.

   Setning: La A være en $n \times n$-matrise. Hvis A er symmetrisk, så er A^T symmetrisk.
   Bevis. Anta A er symmetrisk, dvs. $A = A^T$. Da har vi $(A^T)^T = A^T$, og dermed er A^T symmetrisk.

5. **Direkte metode for P $\Leftrightarrow$ Q**

   Vi deler opp i to deler, og viser P $\Rightarrow$ Q og Q $\Rightarrow$ P.

6. **Flere ekvivalente utsagn**.

   La P, Q, S være utsagn. Alle er ekvivalente hvis P $\Leftrightarrow$ Q, P $\Leftrightarrow$ S, Q $\Leftrightarrow$ S.

   Merk: Det er da nok å vise at P $\Rightarrow$ Q, Q $\Rightarrow$ S, S $\Rightarrow$ P.

   Setning: La A være en $n \times n$ - matrise. Følgende utsagn er ekvivalente.
   (a) A er inverterbar

(b) Redusert trappeform for A er I_n

(c) A er et produkt av elementære matriser

Her viser vi (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).

7. **Kontrapositiv metode for å vise P $\Rightarrow$ Q**

Vi kan istedet vise IKKE Q $\Rightarrow$ IKKE P.

Setning: La n være et helt tall. Hvis n^3 er et odde tall, så er n odde tall.
Bevis: Anta at n ikke er odde tall, dvs. n er like tall, dvs. $n = 2k$ for et helt tall k. Da er $n^3 = 8k^3$, altså et like tall. Dermed er n^3 ikke et odde tall.

Setning: La A være en $n \times n$-matrise. Hvis $A\underline{x} = \underline{0}$ bare har den trivielle løsning, så er redusert trappeform for A lik I_n.
Bevis: Anta redusert trappeform for A ikke er I_n. Da må vi ha en rad med bare nuller. Vi får da et homogent ligningssystem med flere ukjente enn ligninger, og dermed et uendelig antall løsninger. Dermed har også $A\underline{x} = \underline{0}$ et uendelig antall løsninger.

8. **Bevis ved selvmotsigelse**

Setning: Det fins ikke noe reelt tall som er løsning for ligningen $x^2 - 6x + 10 = 0$.
Bevis: Anta at påstanden er gal, slik at det fins et reelt tall x_0 som er løsning for ligningen. Da har vi $x_0^2 - 6x_0 + 10 = 0$, og dermed $(x_0 - 3)^2 + 1 = 0$. Dette gir en motsigelse, da $(x_0 - 3)^2 + 1 \geq 1$. Dermed er påstanden riktig.

[Utsagnet IKKE Q var GALT, så dermed må Q være RETT]

9. **Bevis for "P ELLER Q"**

P ELLER Q er ekvivalent med IKKE P $\Rightarrow$ Q.

Setning: La A være en $n \times n$-matrise, og la R være redusert trappeform for A. Da har R en rad av nuller eller $R = I_n$.
Bevis: Anta at R ikke har noen rad med 0'er. Vi viser at da må R= I_n.

10. **Induksjonsbevis**

Prinsipp for matematisk induksjon: Hvis P(1) er rett, og P$(k+1)$ er rett når $P(k)$ er rett (for $k \geq 1$) så er P(n) rett for alle hele positive tall n.

Setning: La A være en $n \times n$-matrise. Da har vi $(A^n)^T = (A^T)^n$ for alle hele positive tall n.

Bevis:

1) La $n = 1$. Da har vi $(A^1)^T = A^T$ og $(A^T)^1 = A^T$.

2) La $k \geq 1$ og anta at utsagnet er rett for $n = k$. Vi har da $(A^k)^T = (A^T)^k$, og får $(A^{k+1})^T = (A^k A)^T = A^T (A^k)^T = A^T (A^T)^k = (A^T)^{k+1}$. Dermed holder utsagnet for $n = k+1$.