

Et utvalg av eksamensoppgaver i
lignende kurs.

S.1

✓ Oppgave 3

EKSAMEN 20. DESEMBER 1985

La A være en 3×3 -matrise. Anta at $\det A = 1$ og at alle elementer i A er hele tall. Vis at da må alle elementene i A^{-1} være hele tall.

(Oppgave 4

Finn alle 4. røtter til det komplekse tallet $1+i$. (dvs. finn alle komplekse tall w som tilfredsstiller likningen $w^4 = 1+i$.)

• Oppgave 3

EKSAMEN 19. DESEMBER 1986

a) Rekn ut A^n for $n = 2, 3, 4$ når

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Lat A være ei $n \times n$ -matrise slik at $A^2 = -I_n$. Vis at da må n være eit like tal og $\det A = \pm 1$.

c) Lat A være ei 2×2 -matrise slik at $A^2 = -I_2$.
Vis at da er $\det A = 1$.

Eksamen i Ma 7
19. desember 1986

NYNORSK

Framhald:

• Oppgave 4

Løys likningssystemet

$$\begin{aligned}(1 + i)z_1 + 2z_2 &= 1 \\ -2z_1 + (1-i)z_2 &= 1\end{aligned}$$

og merk av z_1 og z_2 i det komplekse planet.

Eksamen i Ma 7

18. desember 1987

NYNORSK

Oppgave 2

a) Rekn ut determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

b) For $n \geq 3$ rekn ut $n \times n$ -determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Oppgave 3

Løys likningssystemet

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + z &= 1 \\ z + u &= 1 \\ -x &+ u = 1 \end{aligned}$$

a) ved Gauss - Jordan sin metode og

b) ved Cramer sin regel.

Oppgave 5

EKSAMEN 18. DESEMBER 1987 (S.4)

Finn alle komplekse tal z slik at

$$(z-i)^2 = i$$

Oppgave 6

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vis at $B^3 = 0$ og at $A^{-1} = I - B + B^2$.

(0 = nullmatrisa, I = identitetsmatrisa).

Fortsetter:

Oppgave 3

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Finn $\det(A)$, $\text{adj}(A)$ og A^{-1} .
- b) Løs likningssystemet

$$\underline{Ax} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

- a) Skriv $-1 + \sqrt{3}i$ på polarform.
- b) Finn alle komplekse tall z slik at

$$z^3 = (-1 + \sqrt{3}i)^4.$$

Skisser løsningene i det komplekse planet.

Oppgave 2

a) Løs ligningen

$$z^3 = 8i$$

Angi svaret både i polarkoordinater og på koordinatform. Skisser løsningen i det komplekse planet.

b) Løs ligningssystemet

$$(1 + 2i)x_1 + 2\sqrt{2}x_2 = 1 - 2i$$

$$x_1 - \sqrt{2}x_2 = 1 + 3i$$

Oppgave 3

En kvadratisk matrise A kalles symmetrisk hvis $A^t = A$ og skjev-symmetrisk hvis $A^t = -A$.

a) Vis at for alle kvadratiske matriser A er

$$A + A^t \text{ symmetrisk og}$$

$$A - A^t \text{ skjev-symmetrisk.}$$

b) Bruk dette til å vise at en generell kvadratisk matrise kan skrives som en sum av en symmetrisk og en skjev-symmetrisk matrise.

Fortsetter:

Oppgave 4

I denne oppgaven er A og B to invertible $n \times n$ -matriser.
 $\text{adj}(A)$ betegner den adjungerte matrise. Vis at

a) $\det(\text{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$

b) $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B)\text{adj}(A)$

c) $\text{adj}(A^{-1}) = \text{adj}(A)^{-1}$

Oppgave 5

La $z_1 \neq 1$ være en løsning av likningen

(*) $z^5 = 1$.

Sett $z_n = z_1^n$ for $n = 2, 3, 4, 5$.

a) Vis at da er z_2, z_3, z_4 og z_5 de andre
løsningene av (*).

b) Vis at $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0$.

Oppgave 3

a) Gitt ligningssystemet

$$(a^2 - 1)x - a^2y = 1 - a^2$$

$$ay + az = a + 1$$

$$(a^2 - 1)x - a^2y + z = 0$$

Avgjør for hvilke a ligningssystemet har løsning og når det ikke har løsning. Hvis ligningssystemet har løsning, avgjør om det har entydig løsning eller ikke.

b) Løs ligningssystemet når $a = -1$.

EKSAMEN 14. DESEMBER 1989

2

Oppgave 3

Løs den komplekse ligningen

$$z^6 = 1.$$

Skriv svaret på polar form og på formen $a+ib$. Skisser løsningene i det komplekse planet.

Oppgave 4

La A være en $n \times n$ matrise og B en $m \times m$ matrise.

La $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, der 0 er nullmatriser av passende størrelse.

a) Vis at $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$

der 0 fortsatt er nullmatriser av passende størrelse.

b) Bruk dette til å vise at $\det(M) = \det(A) \det(B)$.

Oppgave 2

a) La $Q(x, y) = 7x^2 + 3y^2 - 2xy$.

Avgjør hva slags kurve $Q(x, y) = 1$ er. Begrunn svaret.b) Finn maksimums- og minimumsverdien til $Q(x, y)$ når $x^2 + y^2 = 1$.

Oppgave 5

La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Finn egenverdiene til A og en basis for \mathbb{C}^2 som diagonaliserer A .

Oppgave 4

- a) La $Q(x, y) = \frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2$. Avgjør hva slags kurve $Q(x, y) = 1$ er. Begrunn svaret.
- b) Finn maksimums- og minimumsverdien til $Q(x, y)$ når $x^2 + y^2 = 4$.

Oppgave 5

- a) La P være matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Vis at P er invertibel og finn P^{-1} .

EKSAMEN 1. JUNI 1999

Oppgave 4

La

$$M = \begin{bmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{bmatrix}$$

med $p, q \in [0, 1]$.

- a) Vis at egenverdiene til M er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = p - q$ og finn en matrise P som diagonaliserer M .
- b) Vis at hvis $|p - q| < 1$ vil

$$M^n \rightarrow \frac{1}{1+q-p} \begin{bmatrix} q & q \\ 1-p & 1-p \end{bmatrix} \text{ når } n \rightarrow \infty.$$

EKSAMEN 2 JUNI 1994

S. 11)

Ø Oppgave 3

La $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være en lineær transformasjon gitt ved

$$T(x, y, z) = (2x - y - z, x - z, -x + y + 2z)$$

- a) La A være matrisen til T med hensyn på den vanlige basisen for \mathbb{R}^3 . Finn A .
- b) Finn egenverdiene til A .

EKSAMEN 3. DESEMBER 1993

Ø Oppgave 4

La

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 13 \end{bmatrix}$$

- a) Forklar hvorfor A er ortonormalt diagonaliserbar.
- b) Finn egenverdiene og egenvektorene til A .
- c) Finn en ortogonal matrise som diagonaliserer A .
- d) Bestem hvilket kjeglesnitt som er gitt ved

$$15x^2 - 2\sqrt{3}xy + 13y^2 - 12x + 12\sqrt{3}y - 36 = 0$$

Tegn kjeglesnittet.

Ø Oppgave 6

a) Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + iy - (1+i)z &= 1 \\ x - 2y + iz &= 0 \\ -ix + y - (2-i)z &= 1 \end{aligned}$$

for $x, y, z \in \mathbb{C}$.Svarene skal gis på formen $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Løs ligningen

$$z^2 + 2z = i$$

for $z \in \mathbb{C}$.

Skisser løsningene i det komplekse plan.

EKSAMEN 5 JUNI 1989

Ø Oppgave 2

$$a) \text{ La } A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Finn en inverterbar 2×2 -matrise P , dens invers P^{-1} og en 2×2 diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$.

b) En by med 220.000 stemmeberettigede innbyggere har 2 partier U og V , der i dag 50.000 stemmer på U og 170.000 på V . Hvert år skifter 60% parti fra U til V og 50% fra V til U .

Hvordan blir fordelingen mellom partiene etter 4 år? Hvordan blir fordelingen i det lange løp?

s. 13)

26. MAI 1987

Oppgave 5

La A være en reell $n \times n$ - matrise. Vis at da gjelder:

$$A^t A = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

(0 = nullmatrisen)

2. MAI 1986

⊗ Oppgave 3

La $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Finn en ortogonal matrise P med $\det P = 1$ og en diagonalmatrise D slik at $D = P^t A P$. Avgjør så om kjeglesnittet $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9$ er en ellipse, parabel eller hyperbel.

1. JUNI 2001

Oppgave 2

La r være et naturlig tall ($r \in \{1, 2, 3, \dots\}$)

Betrakt matrisa

$$E_r = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ og la}$$

$$T_r = -(E_r^{-1})^t E_r.$$

a) Regn ut og verifiser at

$$T_r = \begin{pmatrix} -1 & r \\ -r & r^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

b) Avgjør for hvilke r matrisen T_r kan diagonaliseres som reell matrise.

☉ Oppgave 2

a) La A være matrisa $A = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$. Diagonaliser matrisa A .

b) Ved presidentvalget i USA i 1960 ble det avlagt 6 800 000 stemmer i staten Adidolf. Den republikanske kandidaten fikk 71 % av stemmene, mens den demokratiske kandidaten fikk 29 % av stemmene.

Det viser seg at det ved hvert presidentvalg blir avlagt 6 800 000 stemmer i Adidolf. For enkelhets skyld antar vi at det er de samme som stemmer ved alle valg. Imidlertid så stemmer 30 % av de som stemte republikansk ved et valg, demokratisk ved neste valg. Det samme skjer hos demokratene, 30 % av de som stemte demokratisk ved forrige valg, stemmer republikansk ved neste valg.

Hvilken kandidat vinner valget i 2000 i denne staten, og med hvor mange stemmer? (Det er valg hvert 4. år i USA).

Hvordan vil fordelingen mellom de to partiene bli i det lange løp i denne staten?



Faglig kontakt under eksamen: Carl Fredrik Berg
Telefon: 7359 0482

Eksamen i MA1201 Lineær algebra og geometri
Onsdag 3. desember 2003
Kl. 09.00-13.00

Hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt

Hvert av de 8 punktene teller likt.

Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregninger at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Finn redusert trappeform for matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ og løs ligningssystemet

$$\begin{aligned}x + 3y + z &= 0 \\2x + 3y + 2z &= 0 \\-2x + 6y + z &= 6\end{aligned}$$

b) La A_a være matrisen $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$. Beregn $\det A_a$, og avgjør for hvilke a matrisen A_a er inverterbar.

Finn A_a^{-1} for $a = -3$.

c) For hvilke a har ligningssystemet

$$\begin{aligned}x + ay + z &= 0 \\2x + 3y + 2z &= 0 \\-2x + 6y + z &= 6\end{aligned}$$

ingen løsninger, nøyaktig én løsning, uendelig mange løsninger?

Oppgave 2

Vis at $\frac{z_1}{z_2 z_3} = 1 + i$, når $z_1 = 15 + 5i$, $z_2 = 2 + i$ og $z_3 = 3 - 4i$. Skriv $1 + i$ på polarform, og finn alle 4. røtter av $1 + i$.

Oppgave 3

a) Finn egenverdiene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Finn en ortogonal matrise P slik at $P^{-1}AP = D$, der D er en diagonalmatrise.

b) Hvilket kjeglesnitt er gitt ved ligningen

$$3x^2 + 3y^2 + 2xy = 9$$

Tegn en skisse av kjeglesnittet.

Oppgave 4

La A være en $n \times n$ -matrise. Hvilke av følgende utsagn er ekvivalent med at $\det A = 0$. Her kreves ingen begrunnelse.

- a) Den tilhørende lineærtransformasjon T_A er 1-1
- b) $A\underline{x} = \underline{0}$ har uendelig mange løsninger
- c) $A^2 = \underline{0}$
- d) A er ikke inverterbar
- e) A er en elementærmatrise

Oppgave 5

La A være en kvadratisk matrise, og A^T den transponerte matrisen. Vis at vi da har følgende:

$$A \text{ er inverterbar} \Leftrightarrow A^T A \text{ er inverterbar}$$



Faglig kontakt under eksamen: Carl Fredrik Berg
Telefon: 975 05 585

Eksamen i MA1201 Lineær algebra og geometri

Fredag 4. juni 2004

Kl. 09.00-13.00

Hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt

Hvert av de 10 punktene teller likt.

Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregninger at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Finn redusert trappeform for matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ og løs ligningssystemet

$$x - 3y + 2z = -3$$

$$2x + 2y - 4z = 2$$

$$3x + y - 2z = 5$$

b) La A_a være matrisen $\begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ hvor a er et element i \mathbb{R} . Beregn $\det A_a$, og avgjør for hvilke a matrisen A_a er inverterbar.

c) Finn løsningsmengden til $A_a \underline{x} = \underline{b}$, hvor $a = -1$ og $\underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Oppgave 2Finn x i ligningen

$$(-1 + \sqrt{3}i)x = (2\sqrt{3} + 2i)(1 - \sqrt{3}i)$$

Oppgave 3

- a) Finn egenverdiene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$. Finn en matrise P slik at $P^{-1}AP = D$, der D er en diagonalmatrise.
- b) Regn ut A^n når n er et positivt heltall.

Oppgave 4

La A være en $n \times n$ -matrise hvor n er et positivt heltall, og la lineærtransformasjonen $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ være gitt ved multiplikasjon med A . Hvilke av følgende utsagn er ekvivalent med at $\det A \neq 0$. Her kreves ingen begrunnelse.

- i) A er en symmetrisk matrise
- ii) $\det A^T \neq 0$
- iii) $A\underline{x} = \underline{b}$ har nøyaktig én løsning for enhver vektor \underline{b}
- iv) T_A er en en-til-en (en-entydig) lineærtransformasjon
- v) bildet til T_A er hele \mathbb{R}^n (dvs. lineærtransformasjonen T_A er på)

Oppgave 5

La $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ være en ortogonal 2×2 -matrise over \mathbb{R} . Forklar hvorfor søylevektorene $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ er ortogonale og har norm lik 1.

Oppgave 6

- a) La A være firkanten i \mathbb{R}^3 gitt ved hjørnene $P = (1, 3, 2)$, $Q = (2, 5, 4)$, $R = (3, 5, 5)$ og $S = (4, 7, 7)$.

Finn arealet av A .

- b) La vektorene $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ ligge i \mathbb{R}^3 , og la matrisa $B = \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{bmatrix}$ ha disse vektorene som rader.

Vis at vektorene $\underline{u}, \underline{v}$ og \underline{w} ligger i samme plan hvis og bare hvis $\det B = 0$.



Fagleg kontakt under eksamen: Idun Reiten
Telefon: 7359 1742

Eksamen i MA1201 Lineær algebra og geometri
Torsdag 9. desember 2004
Kl. 09.00-13.00

Hjelpemiddel: Ingen hjelpemiddel tilatt

Grunngi alle svar. Ta med så mange mellombels utrekningar at måten du reknar på er grei å følgje.

Oppgåve 1

a) Finn redusert trappeform for matrisa $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ og løys likningssystemet

$$x + 2y - 3z = 4$$

$$3x - y + 5z = 2$$

$$4x + y - 5z = 5$$

b) Avgjer kva for verdiar av a som likningssystemet

$$x + 2y - 3z = 4$$

$$3x - y + 5z = 2$$

$$4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2$$

(i) har inga løysingar? (ii) har nøyaktig ei løysing? (iii) har uendeleg mange løysingar?

Oppgave 2

Rekn ut kryssproduktet $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ når $\mathbf{u} = (-3, 2, -1)$ og $\mathbf{v} = (0, 5, -1)$.

Finn arealet av trekanten bestemt av punktane $P_1 = (1, -1, 2)$, $P_2 = (-2, 1, 1)$ og $P_3 = (1, 4, 1)$.

Oppgave 3

Skriv det komplekse talet $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ på polarform, og finn alle 3. røtter av $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$.

Oppgave 4

La $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, og la $T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vere den tilhøyrande lineærtransformasjonen.

Berekn $T_A(2, 3)$, og gi ei geometrisk tolking av T_A .

Oppgave 5

a) Finn eigenverdiane til matrisa $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, og for kvar eigenverdi, finn ein tilhøyrande eigenvektor.

b) Finn ei matrise P slik at $P^{-1}AP = D$, hvor D er ei diagonalmatrise.

Vis at for heiltal $k \geq 1$ så har vi at $A^k = \frac{3^k-1}{2}A + \frac{3-3^k}{2}I$ (der I er 2×2 -identitesmatrisa).

Oppgave 6

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Det oppgjes at for den ortogonale matrisa $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ og diagonalmatrisa $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, så har vi $P^{-1}AP = D$.

Avgjer om kjeglesnittet gitt ved likninga

$$x^2 + y^2 + 4xy = 1$$

er ei ellipse, parabel eller hyperbel, og gi ei skisse av kjeglesnittet.

Oppgave 7

La A vere ei $n \times n$ matrise slik at $A^2 = A$. Vis at vi da har følgjande:

$$A \text{ er inverterbar} \Leftrightarrow A = I$$

Oppgave 8

La r vere eit reelt tal, og la A_r vere matrisa

$$A_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r & 1 & 1 & 1 \\ r & r & 1 & 1 \\ r & r & r & 1 \end{bmatrix}$$

Vis at $\det A_r = (1 - r)^3$, og avgjer kva for verdiar av r som gjer matrisa A_r inverterbar.



Faglig kontakt under eksamen: Anita Valenta
Telefon: 977 37 661

Eksamen i MA1201 Lineær algebra og geometri
Torsdag 26. mai 2005
Kl. 09.00-13.00

Hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt.

Hvert av de 9 punktene teller likt.

Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregninger at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Finn redusert trappeform for matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ og løs ligningssystemet

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\2x + 4y - 3z &= 1 \\3x + 6y - 5z &= 0\end{aligned}$$

b) For hvilke t har ligningssystemet

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\2x + 4y - 3z &= t + 1 \\3x + 6y + \left(3t^2 - \frac{15}{2}\right)z &= 0\end{aligned}$$

ingen løsning, nøyaktig en løsning, uendelig mange løsninger?

Oppgave 2

- a) Gitt to komplekse tall z og w , la A være matrisen $A = \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}$, der \bar{z} og \bar{w} er kompleks konjugerte til hhv. z og w . Vis følgende påstand: Hvis matrisen A er forskjellig fra $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, så er determinanten til A et positivt reelt tall.
- b) Skriv $1 - i$ på polarform og finn alle 3. røtter av $1 - i$.

Oppgave 3

- a) Finn egenverdiene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Finn en matrise P slik at $P^{-1}AP = D$, der D er en diagonalmatrise.
- b) Regn ut A^n når n er et positivt heltall.
- c) Er matrisen A inverterbar? Vis at en inverterbar matrise har en entydig invers.

Oppgave 4

La $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være projeksjonen ned på x -aksen og la $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være rotasjonen 90° mot klokka. Beskriv T_1 og T_2 med standard matriser. Er $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$?

Oppgave 5

Finn en ligning som beskriver planet som inneholder punktene $P_1(-1, 2, 5)$, $P_2(2, 1, 4)$ og $P_3(1, 1, 0)$.



Faglig kontakt under eksamen: Tore August Kro
Telefon: (735) 91827

Eksamen i MA1201 Lineær algebra og geometri

Mandag 12. desember 2005

Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt.

Hvert av de 10 punktene teller likt.

Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Finn redusert trappeform for matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ og løs ligningssystemet

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 3 \\4x + 7y + 2z &= 1 \\3x + 5y - 2z &= -3\end{aligned}$$

b) For hvilke a har ligningssystemet

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 3 \\4x + 7y + 2z &= 1 \\3x + 5y + az &= -3\end{aligned}$$

ingen løsning, nøyaktig en løsning, uendelig mange løsninger?

Oppgave 2

Skriv $w = 2 - 2\sqrt{3}i$ på polarform og finn 2. røttene til w . Løs ligningen $(z + 2)^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$.

Oppgave 3

- a) Finn egenverdiene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$, og finn tilhørende egenvektorer. Normaliser disse egenvektorene. Sett opp en ortogonal matrise P slik at $P^T A P = D$ er diagonal. Er den kvadratiske formen $9x^2 - 24xy + 16y^2$ positivt definit?
- b) Avgjør om kjeglesnittet gitt ved ligningen

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 20x + 15y = 0$$

er en ellipse, parabel eller hyperbel, og tegn en skisse av løsningsmengden.

Oppgave 4

La $P = (3, -1, -2)$, $Q = (1, -1, -1)$ og $R = (-1, 0, 1)$.

- a) Finn arealet av trekanten med hjørner i P , Q og R .
- b) Avgjør om punktet $S = (-1, 3, 4)$ ligger i planet bestemt av punktene P , Q og R .

Oppgave 5

En transformasjon $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kan beskrives ved

$$T(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) \quad , \quad (*)$$

hvor f og g er reelle funksjoner i to variable.

- a) La $f(x, y) = y$ og $g(x, y) = 2x - y$. Det oppgis at T gitt ved formelen (*) i dette tilfellet blir lineær. Regn ut $T(1, 0)$ og $T(0, 1)$, og skriv opp standardmatrisen til T .
- b) Gi et eksempel på en transformasjon $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som **ikke** er lineær. Med ditt valg av T finn

enten reelle tall x, y og c slik at $T(cx, cy) \neq cT(x, y)$,

eller reelle tall x_1, y_1, x_2 og y_2 slik at $T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \neq T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$.

Oppgave 6

La A være en 2×2 matrise og P en ortogonal 2×2 matrise. Vis at A er symmetrisk hvis og bare hvis $P^{-1}AP$ er symmetrisk.