MIDTSEMESTERPRØVE - MA1201 LINEÆR ALGEBRA OG GEOMETRI

Fredag 13. oktober 2006 kl. 10.15-12.00 - **Bokmål**

Faglig kontakt: Idun Reiten (735)91742 / 99244539

Ingen tillatte hjelpemidler

Studentnummer: ____________

Prøven består av 8 flervalgsoppgaver. Du skal sette **nøyaktig** to kryss på oppgavene 6 og 7, og **nøyaktig** ett kryss på de andre oppgavene. Lykke til!

Oppgave 1 Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hva er da $A^T B + AB$?

$$\square \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \square \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \square \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \square \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \square \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2 Nøyaktig én av søylevektorene under er løsning av ligningssystemet. Hvilken?

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\square\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \square\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}, \square\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \square\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \square\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 3 Hva kan vi si om hvor mange løsninger følgende ligningssystem har

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} ?$$

☐ Ingen løsninger, ☐ Nøyaktig én løsning, ☐ Nøyaktig to løsninger,
☐ Uendelig mange løsninger, ☐ Det kommer an på b_1, b_2 og b_3

Oppgave 4 Hva er den inverse til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}?$$

$$\square \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -8 & 2 \end{bmatrix}, \square \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ -4 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \square \begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 8 & 5 & -4 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\square \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \square \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 7 & -1 \\ -8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 5 Hvilket av alternativene er et nødvendig og tilstrekkelig krav for at ligningssystemet skal være konsistent?

$$\begin{array}{ccccc} x & +y & +2z & = & a_1 \\ 2x & & +z & = & a_2 \\ 3x & +7y & +12z & = & a_3 \end{array}$$

$\square\ a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$, $\square\ 4a_1 - a_2 - a_3 \neq 0$, $\square\ -7a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$

$\square\ -a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 0$, $\square\ 4a_1 + 7a_2 - a_3 = 0$

Oppgave 6 Hvilke to påstander er **SANNE** for en vilkårlig $n \times n$-matrise A?

- ☐ Hvis $\det(A) = 0$, så er to rader eller søyler i A proporsjonale
- ☐ Hvis $\det(A) = 2$, så er redusert trappeform til A lik I_n
- ☐ Hvis A er inverterbar, så kan A^{-1} skrives som et produkt av elementærmatriser
- ☐ Hvis A er en øvre triangulær matrise, så har A en invers som også er øvre triangulær
- ☐ A kan skrives som et produkt av diagonalmatriser

Oppgave 7 Hvilke to påstander er **SANNE** for to vilkårlige $n \times n$-matriser A og B og et vilkårlig heltall k?

- ☐ $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- ☐ $(A + I_n)^2 = A^2 + 2A + I_n$
- ☐ Hvis A er inverterbar, så er $(kA)^{-1} = k \cdot A^{-1}$
- ☐ $(kA)^m = k^m \cdot A^m$ for alle positive heltall m
- ☐ Hvis både A og B er inverterbare, så er $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

Oppgave 8 La A og B være to $n \times n$-matriser. Nøyaktig ett av argumentene under er et riktig bevis for påstanden "Hvis AB er inverterbar, så er A og B også inverterbare". Hvilket?

- ☐ AB inverterbar $\Rightarrow (AB)(AB)^{-1} = I_n \Rightarrow (AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = I_n \Rightarrow A(BB^{-1})A^{-1} = I_n \Rightarrow A \cdot I_n \cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow A \cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow$ A inverterbar. På samme måte får vi at B er inverterbar.
- ☐ Anta at A eller B (eller begge) ikke er inverterbar. Hvis A ikke er inverterbar, har vi $\det(A) = 0 \Rightarrow \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 0 \Rightarrow AB$ ikke inverterbar. Hvis B ikke er inverterbar, har vi $\det(B) = 0 \Rightarrow \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 0 \Rightarrow AB$ ikke inverterbar.
- ☐ Anta at A og B er inverterbare. Da er $\det(A) \neq 0$ og $\det(B) \neq 0$. Dermed er $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \neq 0$, og det medfører at AB er inverterbar.
- ☐ Anta at A og B ikke er inverterbare. Da er $\det(A) = 0$ og $\det(B) = 0$. Så $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 0$, som igjen medfører at AB ikke er inverterbar.