Oppgaver til bevismetoder

Uttrykket $3 \mid n$ betyr at 3 deler n, det vil si at $\frac{n}{3}$ er et heltall, som igjen er ekvivalent med at $n = 3a$ for et heltall a.

Oppgave 1: Hvilke av de følgende setningene er utsagn, og avgjør om utsagnene er RETT eller GAL:

i) $7 > 5$
ii) Er $5 > 7$?
iii) Hvis 5 er like, så er $6 = 7$
iv) Vis at $\sqrt{2}$ ikke er et heltall
v) $5 > 7$
vi) $\sqrt{2}$ er et heltall

Oppgave 2: Vis at dersom 3 deler n^2, så deler 3 også n.

Oppgave 3: Vis eller motbevis at 3 deler n^2 hvis og bare hvis 3 deler n (dvs. $3|n^2 \Leftrightarrow 3|n$)

Oppgave 4: Vis eller motbevis at 4 deler n^2 hvis og bare hvis 4 deler n (dvs. $4|n^2 \Leftrightarrow 4|n$)

En mulig løsning til oppgave 2: Anta $3 \nmid n$, det vil si at 3 ikke deler n. Da må n være på formen $3k + 1$ eller $3k + 2$ for k et heltall. Ser da at n^2 må være $(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ eller $(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Vi ser at $3 \nmid n^2$, og har dermed vist at

$$3 \nmid n \Rightarrow 3 \nmid n^2$$

Dersom vi lar P være utsagnet $3 \mid n^2$ og Q være utsagnet $3 \mid n$, ser vi at IKKE P blir $3 \nmid n^2$ og IKKE Q blir $3 \nmid n$. Uttrykket overfor kan dermed bli reformulert som

$$\text{IKKE } Q \Rightarrow \text{ IKKE } P$$

som igjen er ekvivalent med

$$P \Rightarrow Q$$

eller, for å skrive det med matematiske symboler

$$3 \mid n^2 \Rightarrow 3 \mid n$$