Norges teknisk-
naturvitenskapelige universitet

Institutt for matematiske fag

MA1201 Lineær algebra og geometri
Fasit for eksamen gitt 22. mai 2008

Oppgave 1

a) Løsning: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Løsning: $X = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

Oppgave 2

Løsningsmengde: $y = -x$ det vil si $z = x(1-i)$ der $x \in \mathbb{R}$.

Oppgave 3

a) Standardmatrisen til T_A: $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Standardmatrisen til T_B: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Standardmatrisen til $T_B \circ T_A$: $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

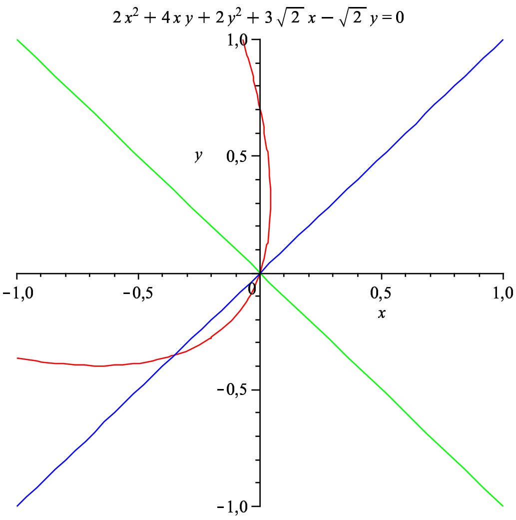
Lineær transformasjonen $T_B \circ T_A$ er **ikke** invertibel.

Oppgave 4

a) Egenverdiene til A: $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 4$

b) Én mulighet for P og D: $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Med dette valget av P er den geometriske fortolkningen av P en rotasjon med rotasjonsvinkel $\frac{\pi}{4} (= 45°)$.

c) Figuren til høyre er en skissé av $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 3\sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$ i xy-planet der x'-aksen er merket blått og y'-aksen er merket grønn. Legg merke til parabelen skjærer x'-aksen for $x' = -\frac{1}{2}$ og $x' = 0$.



Oppgave 5

a) For å vise $B = C$ se på $B = IB = CAB = CI = C$ der vi har benyttet at $AB = I = CA$. Dette betyr at A har en venstre og en høyre inverse. Med andre ord er A invertibel.

b) (i) Moteksempel: La $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ og $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ (begge er invertible matriser). Det gir at $AB = \left[\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, mens $BA = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right]$.

(ii) Ved å gange begge sider av ligningen $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ med A^{-1} fra venstre får vi at $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dersom $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hvis og bare hvis $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er B invertibel (ettersom vi har per antagelse at B er en $(n \times n)$-matrise der n er et positivt heltall). Ettersom B ikke trenger å være invertibel kan vi også ha ikketrivielle løsninger for ligningen $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Altså er påstanden motbevist.

(iii) La A være en ortogonal $(n \times n)$-matrise (n positivt heltall). Da har vi at $A^T = A^{-1}$. Ettersom $\det A = \det A^T$ (som gjelder generelt uavhengig av hvorvidt A er ortogonal eller ei) har vi fra $AA^T = I$ at $\det A \det A^T = (\det A)^2 = \det I = 1$ slik at $\det A = \pm 1$.