Norges teknisk-
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1201 Lineær algebra og geometri
Fasit for eksamen gitt 3. desember 2007

Oppgave 1

a) Ingen løsning: $\alpha = 0$ og $\beta \neq 2$.
Uendelig mange løsninger: $\alpha = 0$ og $\beta = 2$.
Nøyaktig én løsning: $\alpha \neq 0$ ($\beta \in \mathbb{R}$).

b) Redusert trappeform for matrisen A: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$
Parametrisering av den rette linjen som er snittet av de to gitte planene: $x = 1 - 3t$, $y = 3t$ og $z = t \in \mathbb{R}$.

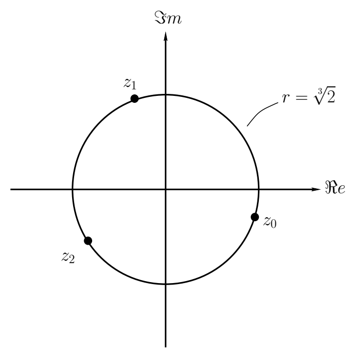
Oppgave 2

$$z = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

$k = 0$: $z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right)$

$k = 1$: $z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right)$

$k = 2$: $z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{9}\right)\right)$



Oppgave 3

a) $T_A(x, y) = (x - 3y, 5y, 0)$
$T_B(x, y, z) = (x - 2y + 4z, -2x + 4y - 8z)$
$T_A(4, 5) = (19, -25, 0)$

b) T_A **er** én-entydig. Standardmatrisen til $T_B \circ T_A$: $\begin{bmatrix} 1 & -13 \\ -2 & 26 \end{bmatrix}$.
$T_B \circ T_A$ er **ikke** invertibel.

Oppgave 4

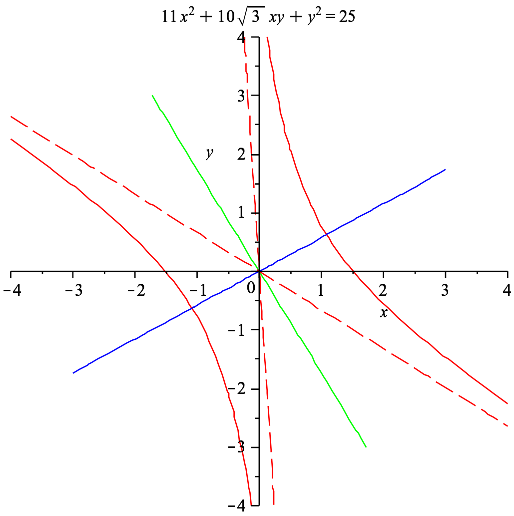
a) $\lambda^2 - 12\lambda - 64 = (\lambda + 4)(\lambda - 16) = 0$ gir at $\lambda_1 = -4$ og $\lambda_2 = 16$.

b) Et mulig valg for P og D er:[t]
$P = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$.

Dette valget for P gir at P har geometrisk fortolkning rotasjon av planet med $\frac{2}{3}\pi$ eller $120°$ om du vil.

c) Med P og D som over blir kjeglesnittet på følgende standardform i $x'y'$-systemet: $\left(\frac{y'}{5/4}\right)^2 - \left(\frac{x'}{5/2}\right)^2 = 1$.

I figuren til høyre markerer de stiplede linjene asymptotene til parablene, mens x'-aksen er merket grønn og y'-aksen er merket blå.



Oppgave 5

a) Hint: Se på $\det(\lambda I - A) = 0$ og vis at diskriminanten i uttrykket for løsningene er større eller lik 0.

b) Hint: Utnytt hva det vil si at λ er en egenverdi for B, altså at $B\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.
Moteksempel: $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.