



Fagleg kontakt under eksamen: Idun Reiten
Telefon: 7359 1742

Eksamen i MA1201 Lineær algebra og geometri
Torsdag 9. desember 2004
Kl. 09.00-13.00

Hjelpemiddel: Ingen hjelpemiddel tilatt

Grunngi alle svar. Ta med så mange mellombels utrekningar at måten du reknar på er grei å følgje.

Oppgåve 1

a) Finn redusert trappeform for matrisa $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ og løys likningssystemet

$$x + 2y - 3z = 4$$

$$3x - y + 5z = 2$$

$$4x + y - 5z = 5$$

b) Avgjer kva for verdiar av a som likningssystemet

$$x + 2y - 3z = 4$$

$$3x - y + 5z = 2$$

$$4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2$$

(i) har inga løysingar? (ii) har nøyaktig ei løysing? (iii) har uendeleg mange løysingar?

Oppgave 2

Rekn ut kryssproduktet $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ når $\mathbf{u} = (-3, 2, -1)$ og $\mathbf{v} = (0, 5, -1)$.

Finn arealet av trekanten bestemt av punktane $P_1 = (1, -1, 2)$, $P_2 = (-2, 1, 1)$ og $P_3 = (1, 4, 1)$.

Oppgave 3

Skriv det komplekse talet $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ på polarform, og finn alle 3. røtter av $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$.

Oppgave 4

La $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, og la $T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vere den tilhøyrande lineærtransformasjonen.

Berekn $T_A(2, 3)$, og gi ei geometrisk tolking av T_A .

Oppgave 5

a) Finn eigenverdiane til matrisa $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, og for kvar eigenverdi, finn ein tilhøyrande eigenvektor.

b) Finn ei matrise P slik at $P^{-1}AP = D$, hvor D er ei diagonalmatrise.

Vis at for heiltal $k \geq 1$ så har vi at $A^k = \frac{3^k-1}{2}A + \frac{3-3^k}{2}I$ (der I er 2×2 -identitesmatrisa).

Oppgave 6

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Det oppgjes at for den ortogonale matrisa $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ og diagonalmatrisa $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, så har vi $P^{-1}AP = D$.

Avgjer om kjeglesnittet gitt ved likninga

$$x^2 + y^2 + 4xy = 1$$

er ei ellipse, parabel eller hyperbel, og gi ei skisse av kjeglesnittet.

Oppgave 7

La A vere ei $n \times n$ matrise slik at $A^2 = A$. Vis at vi da har følgjande:

$$A \text{ er inverterbar} \Leftrightarrow A = I$$

Oppgave 8

La r vere eit reelt tal, og la A_r vere matrisa

$$A_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r & 1 & 1 & 1 \\ r & r & 1 & 1 \\ r & r & r & 1 \end{bmatrix}$$

Vis at $\det A_r = (1 - r)^3$, og avgjer kva for verdier av r som gjer matrisa A_r inverterbar.